МБОУ «Средняя общеобразовательная школа № 9 им. В.И. Некрасова»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ С РЕШЕНИЯМИ ПО РАЗДЕЛАМ, НЕ ВХОДЯЩИХ В ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Азизова Сария, 9Б класс
Гаврилюк Татьяна, 9Б класс
Егоров Артемий, 8Б класс
Кравцов Андрей, 9Б класс
Литреев Дмитрий, 9Б класс
Макаров Дмитрий, 9Б класс
Муравьев Максим, 8В класс
Парфенов Илья, 8Б класс
Подрядчикова Ольга, 8Б класс
Ремзаева Яна, 9Б класс
Ремизова Анастасия, 8Б класс
Савина Кристина, 9Б класс
Сизов Артем, 9Б класс
Сушков Виталий, 8Б класс
Титорчук Андрей, 8Б класс
Фалько Александра, 9Б класс
Шило Илья, 8Б класс

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ЛОГИКА

Во всякой творческой деятельности нужны человеку сообразительность, находчивость, догадка, умение рассуждать. Среди задач на сообразительность особый интерес представляют логические задачи. Если для решения задачи требуется лишь логически мыслить и совсем не нужно производить «арифметические выкладки», то такую задачу обычно называют логической. Логические задачи, разумеется, относятся к числу математических, поскольку логику можно рассматривать как очень общую, фундаментальную математику все же логические задачи удобно выделить и изучать отдельно от их более многочисленных "арифметических сестер». При их решении основную, решающую роль играет правильное построение цепочки точных, иногда очень тонких рассуждений. В этом задании мы рассмотрим в чертах три широко распространенных типа логических задач и постараемся выяснить, как следует подходить к их решению.

Чаще всего встречаются задачи, в которых на основании серии посылок, сообщающих те или иные сведения о действующих лицах, требуется сделать определенные выводы.

Задача 1.

На одном заводе работают три друга: слесарь, токарь и плотник. Их фамилии: Борисов, Иванов, Семенов. Профессии и фамилии названы в произвольном порядке. У слесаря нет ни братьев, ни сестер, и он самый младший из друзей. Семенов женат на сестре Борисова, он старше токаря. Назовите фамилии слесаря, токаря и плотника.

Обсуждение. Прежде всего выделим посылки, их четыре:

1. У слесаря нет ни братьев, ни сестер.
2. Слесарь самый младший друзей.
3. Семенов женат на сестре Борисова.
4. Семенов старше токаря.

Эти посылки можно было бы перевести на язык математической логики, воспользовавшись ее стандартными обозначениями, и искать решение с помощью соответствующих методов. Однако такой подход требует привлечения специального математического аппарата, тому же, как правило, выкладки бывают слишком громоздкими. С другой стороны, без сокращённых обозначений того или иного рода трудно понять логическую структуру задачи. Удобнее всего воспользоваться таблицей, в пустые клетки которой мы будем вписывать всевозможные комбинации элементов рассматриваемых множеств.

Решение.

	Б	И	С
с	0	1	0
т	1	0	0
п	0	0	1

Составим таблицу сверху которой для краткости начальными обозначим буквами фамилии друзей и слева их профессии. В каждую клетку впишем 1, если со соответствующая комбинация допустима, или о если комбинации противоречит условию задачи.

Условия 1 и 3 очевидно исключают возможность того что Борисов слесарь, поэтому в клетку, стоящую в левом верхнем углу таблицы (клетку (с,Б)),мы вписываем 0.

Условия 2 и 4 исключают возможность того, что Семенов-слесарь. Поэтому в клетку, стоящую в правом верхнем углу таблицы (клетку (с,С)), также вписываем 0. Но так как один из трех друзей слесарь, то им быть только Иванов. Поэтому в клетку (с, и) вписываем 1 а в остальные клетки среднего столбца-0 (если Иванов слесарь, то он токарь и не плотник).

Условие 4 исключает возможность того, что Семенов токарь. Поэтому в клетку (т,С) вписываем 0, но тогда Семенов может быть только плотником следовательно, в клетку (п,С) вписываем 1, а в клетку (п, Б) вписываем 0.

Теперь у нас осталась лишь одна незаполненная клетка (т, Б), в которую мы очевидно должны вписать.

Итак, Борисов-токарь, Иванов-слесарь, Семенов-плотник.

Отметим, что достигнуть цели нам помог метод исключений. Мы воспользовались советом Шерлока Холмса: "Отбросьте все, что не могло иметь места, и останется единственный факт, который и есть Истина».

Задача 2.

Пять школьников из различных городов Ленинградской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос «Откуда вы?» Они дали следующие ответы. Иванов: «Я приехал из Кировска, а Дмитриев из Гатчины». Сидоров: «Я приехал из Кировска, Петров из Тихвина». Петров: «Я приехал из Кировска, а Дмитриев из Выборга». Дмитриев: «Я приехал из Гатчины, а Ефимов из Луги». Ефимов: «Да, я действительно из Луги, а Иванов живёт в Выборге». Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое ложно?

Обсуждение.

Как и при решении предыдущей задачи, начнем с того, что выделим высказывания всех действующих лиц.

Для краткости условимся считать, что запись «$И_1$ –из К» Означает первое высказывание Иванова: «Я приехал из Кировска» (Иванов из Кировска). Аналогично запишем все остальные высказывания: $И_2$- Д из Г, $С_1$-С из К, $С_2$-П из Т, $П_1$-П из К, $П_2$-Д из В, $Д_1$-Д из Г, $Д_2$- Е из Л, $Е_1$-Е из Л, $Е_2$-И из В

Начнем с высказываний Иванова. Из условия задачи что следует, возможны два варианта: 1) $И_1$ истинно, $И_2$ ложно; 2) $И_1$ ложно, а $И_2$ истинно. Рассмотрим первый из них.

Составим таблицу и заполним ее по правилам, указанным в предыдущей задаче.

	К	Г	Т	В	Л
И	1	0	0	0	0
С	0	1	0	0	0
П	0	0	1	0	0
Д	0	0	0	1	0
Е	0	0	0	0	1

Так как $И_1$ истинно, а $И_2$ ложно, то в клетку (И,К) пишем 1, а в клетку (Д, Г)-0. Нули пишем также во все оставшиеся клетки первой строки и первого столбца.

Так как $И_1$ истинно, то $С_1$ и $П_1$ ложны, а $С_2$ и $П_2$ истинны, поэтому в клетки (П,Т) и (Д В) вписываем 1, а в остальные клетки соответствующих строк и столбцов - нули.

Так как $И_2$ ложно, то $Д_1$ ложно, а значит, $Д_2$ истинно и, следовательно, истинно $Е_1$, а $Е_2$ ложно. Вписав в клетку (Е,Л) единицу, а в остальные свободные клетки последней строки и последнего столбца нули, получим единственную пустую клетку (С,Г), В которую очевидно надо вписать 1.

Заполнив таблицу, получаем, что Иванов живет в Кировске, Сидоров - в Гатчине, Петров -в Тихвине, Дмитриев – в Выборге, Ефимов в Луге.

Мы получили возможное распределение школьников по городам, однако задачу еще нельзя считать решенной. Мы должны провести аналогичные рассуждения для случая, когда $И_1$ ложно, а $И_2$ истинно, ведь не исключено, что задача имеет не единственное решение (или сформулирована некорректно).

Итак, пусть $И_2$ истинно, тогда $П_2$ ложно, а $П_1$ истинно. Но в этом случае оба высказывания Сидорова ложны, а это противоречит условию задачи. Следовательно, наше предположение ($И_2$ истинно) неверно, то есть задача имеет единственное решение.

Отметим, что и в этом случае основным методом решения задачи был метод исключений.

Не менее распространена и другая разновидность логических задач, которые принято называть задачами «о мудрецах».

Задача 3. Трем мудрецам (назовем их А, В и С)завязывают глаза и говорят, что каждому из них на голову надели либо красный, либо зеленый колпак. Затем глаза им развязывают и просят поднять руку если они видят красный колпак, и выйти из комнаты, если уверены в том, что знают, какого цвета колпак у них на голове. Все три колпака оказались красными, поэтому все трое подняли руку. Прошло несколько минут, и С, который отличается большей сообразительностью, чем А и В, вышел из комнаты.

Решение. С спрашивает себя, может ли его колпак быть зеленым. Если бы это было так, то А сразу же узнал бы, что на нем красный колпак, потому что только красный колпак на его голове мог заставить В поднять руку. Но тогда А вышел бы из комнаты. В стал бы рассуждать точно так же и тоже вышел бы из комнаты. Поскольку ни тот ни другой не вышли, С заключил, что его собственный колпак должен быть красным.

Третью разновидность популярных логических задач составляют задачи о лжецах и тех, кто всегда говорит правду. В классическом варианте задачи речь идет о путешественнике, попавшем в страну, населённую двумя племенами члены одного племени всегда лгут, члены другого всегда говорят только правду. Путешественник встречает двух туземцев. «Вы всегда говорите только правду?» - спрашивает он высокого туземца. Тот отвечает: тарабара». Путешественник понял, что слово «тарабара» на языке туземцев означает то ли «да», то ли «нет» но не смог догадаться, что именно. «Он сказал «да», поясняет туземец поменьше ростом, знающий язык путешественника, - но он ужасный лжец». К какому племени принадлежит каждый из туземцев?

Обсуждение. Если второй туземец лжец, то его высказывание ложно, причем должны быть ложны обе части высказывания (лжец всегда говорит неправду). Тогда истинным должно быть высказывание: «он сказал «нет», он всегда говорит только правду». Однако это высказывание не может быть истинным. Первая часть его свидетельствует о том, что высокий туземец лжец, а вторая - что он принадлежит к племени правдивых. Следовательно, второй туземец не может быть лжецом, те. он всегда говорит правду. Значит, верно и его высказывание, из которого следует, что высокий туземец лжец, а «тарабара» на языка туземцев означает «да».

К этому же выводу легко прийти несколько короче, заметив, что если высокий лжец, то он должен солгать и ответить «да». А если он всегда говорит только правду, то и в этом случае он должен ответить «да». Следовательно, «тарабара» на языке туземцев должно означать «да», значит высказывание второго туземца истинно, те., он сказал правду, следовательно, он принадлежит к племени правдивых, а высокий туземец - племени лжецов. Таким образом, решение за дачи может выглядеть следующим образом.

Решение. Высокий туземец должен ответить утвердительно независимо от того, лжет он или говорит правду. Тогда туземец поменьше ростом сказал правду, значит, он должен принадлежать к племени правдивых а его высокий приятель - к племени лжецов.

Задачи раздела «Занимательная логика»

№ 1

Лёня, Женя и Миша имеют фамилии Орлов, Соколов и Ястребов. Какую фамилию имеет каждый мальчик, если Женя , Миша и Соколов члены математического кружка, а Миша и Ястребов занимаются музыкой?

Решение:

	Лёня	Женя	Миша
Орлов	0	0	1
Соколов	1	0	0
Ястребов	0	1	0

1. Женя и Миша имею фамилию не Соколов т.к в математическом кружке занимаются Миша, Женя и Соколов.

2. Миша не Ястребов т.к. Миша и Ястребов занимаются музыкой. Следовательно Миша может быть только Орлов.

3. Женя не Соколов и не Орлов, следовательно Женя Ястребов.

4. Соколов Лёня т.к все другие фамилии заняты.

Ответ: Миша Орлов, Леня Соколов, Женя Ястребов.

№ 2

Соревнования по плаванию были в самом разгаре, когда стало ясно, что первые четыре места займут мальчики из пятёрки лидеров. Их имена: Валерик , Коля, Миша, Игорь, Эдик; фамилии: Симаков, Чигрин, Зимин, Копылов, Блинов. Нашлись знатоки, которые предсказали, что первое место займёт Копылов, второе – Валерик, третье – Чигрин, четвертое – Эдик. Но, как часто бывает , знатоки попали впросак – ни один из ребят не занял того места, которое ему предсказали. На самом деле первое место завоевал Миша, второе – Симаков, третье – Коля, четвёртое – Блинов, а Чигрин не попал в четвёртку сильнейших. Назовите имя и фамилию каждого из лидеров?

Решение:

	Валерик	Коля	Миша	Игорь	Эдик
Симаков	0	0	0	0	1
Чигрин	0	0	0	1	0
Зимин	0	0	1	0	0
Копылов	0	1	0	0	0
Блинов	1	0	0	0	0

1. Валерик не Чигрин и не Копылов и Эдик не Копылов и не Чигрин т.к знатоки предсказали четвёртку лидеров и там были эти ребята.

2. Миша не Копылов (т.к. знатоки ошиблись), не Симаков, не Блинов и не Чигрин (т.к эти ребята вместе с ним заняли места), следовательно он Зимин. В строке Зимин проставляем остальные нули.

3. Коля не Чигрин (т.к.знатоки ошиблись), не Симаков, не Блинов (т.к. эти ребята ребята вместе с ним заняли места), и не Зимин т.к Зимин Миша. Следовательно Коля Копылов. 4. Эдик не Блинов и Валерик не Симаков (т.к. знатоки ошиблись и Эдик с Блиновым и Валерик с Симаковым должны занять разные места), следовательно Эдик Симаков, а Валерик Блинов.

5. Игорь Чигрин т.к все остальные фамилии заняты.

Ответ: Эдик Симаков, Игорь Чигрин, Миша Зимин, Коля Копылов, Валерик Блинов.

№ 3

Студенты педагогического института организовали эстрадный квартет. Михаил играет на саксофоне. Пианист учится на географическом факультете. Ударника зовут не Валерием, а студента географического института зовут не Леонид. Михаил учится не на историческом факультете. Андрей не пианист и не биолог. Валерий учится не на физическом факультете, а ударник - не на историческом. Леонид играет не на контрабасе. На каком инструменте играет Валерий и на каком факультете он учится?

Решение: Миша играет на саксофоне, следовательно он не может играть на других инструментах и остальные не могут играть на саксофоне, показываем это в таблице.

Миша учится не на историческом факультете показываем это в таблице.

Андрей не пианист и не биолог отмечаем это в таблице.

	М	В	Л	А
С	1	0	0	0
П	0	0	1	0
У	0	0	0	1
К	0	1	0	0

	М	В	Л	А
Ф	0	0	1	0
Г	0	0	0	1
И	0	1	0	0
Б	1	0	0	0

Валерий учится не на физическом факультете отмечаем это.

Леонид играет на контрабасе отмечаем это и если он играет на контрабасе следовательно он не играет на других инструментах, отмечаем это в таблице. Пустая клетка осталась на пианисте, следовательно там может быть только Валера, следовательно он не может играть на других инструментах, отмечаем это. Осталась только пустая клетка у ударника, следовательно Андрей ударник, отмечаем это.

Теперь мы знаем, где кто из музыкантов учится, мы можем заполнить вторую таблицу

Пианист у нас Валерий, следовательно он учится на географическом факультете, также следует из этого что он не может учится на других факультетах и другие на географическом, тоже отмечаем это нулями.

Ударник не учится на историческом, следовательно Андрей не историк, следовательно что Андрей учится на физическом в факультете, так как у него там осталось единственная свободная клетка. Так как он учится на физическом факультете, другие не могут на нем учится, ставим нули в таблицу.

Леонид может быть только историком, так как только там осталась свободная клетка. Так как Леонид историк, он не может быть биологом отмечаем это в таблице.

После этого остается одна пустая клетка у биолога и Михаил это биолог.

Ответ: Михаил это биолог и саксофонист. Валерий играет на контрабасе и учится на историческом факультете. Леонид играет на пианино и учится на физическом факультете.

Андрей ударник и географ.

№ 4

Четверо ребят – Алёша, Ваня, Боря, Гриша – соревновались в беге. После соревнований каждого спросили, какое он место занял. Ребята дали следующие ответы:

Алёша: «Я не был ни первым, ни последним».

Боря «Я не был первым».

Ваня: «Я был первым».

Гриша: «Я был последним».

Три из этих ответов правильны, а один неверный. Кто сказал неправду? Кто был первым?

Решение: Для того, что бы решить задачу нам нужно рассмотреть 4 варианта (т.к. в задаче идёт речь про 4 мальчиков).Пусть в каждой из таблиц один из мальчиков будет неправ (т.к. один из ответов данных участниками неверен).

1 случай	Правда	Ложь	Призовое место
Алёша	0	1	1 или 4
Боря	1	0	2 или 3 или 4
Ваня	1	0	1
Гриша	1	0	4

В первой таблице рассмотри такой вариант, что неправду сказал Алёша, а все остальные сказали правду . Тогда призовые места не распределятся между участниками: если Алёша занимает первое место, то Ваня остаётся вообще без места, а если Алёша занимает четвёртое место, то тогда без места остаётся Гриша. Следовательно, Алёша не мог соврать.

2 случай	Правда	Ложь	Призовое место
Алёша	1	0	2 или 3
Боря	0	1	1
Ваня	1	0	1
Гриша	1	0	4

Во второй таблице рассмотрим такой вариант, что неправду сказал Боря, а все остальные сказали правду. Тогда получим, что Боря и Ваня на первом месте, чего быть не может. Следовательно, Боря также не мог соврать.

3 случай	Правда	Ложь	Призовое место
Алёша	1	0	2 или 3
Боря	1	0	2 или 3 или 4
Ваня	0	1	2 или 3 или 4
Гриша	1	0	4

В третьей таблице рассмотрим вариант, что неправду сказал Ваня, а остальные сказали правду. Тогда среди участников соревнований нет такого человека, который занял бы первое место, а такого быть не может. Следовательно Ваня также не мог соврать.

4 случай	Правда	Ложь	Призовое место
Алёша	1	0	2 или 3
Боря	1	0	2 или 3 или 4
Ваня	1	0	1
Гриша	1	0	4

Рассмотрим последний вариант, допустим неправду сказал Гриша. Если Гриша соврёт, то мы получим, что у каждого участника будет своё призовое место (в отличие от других таблиц). Следовательно, по итогам опроса неправду сказал Гриша. А значит, если все остальные сказали правду, то первое место занял Ваня.

Ответ: Неправду сказал Гриша, а первое место занял Ваня.

№ 5

Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления:

Браун: «Я не делал этого. Джонс не делал того».

Джонс: «Браун не делал этого. Смит сделал это».

Смит: «Я не делал этого. Браун сделал это».

Было установлено, далее, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал праву, третий раз солгал, раз сказал правду. Кто совершил преступление?

Решение: Рассмотрим все возможные случаи: 1 - допустим, что преступление совершил Джонс, тогда:

Джонс раз солгал, раз сказал правду

Браун раз солгал, раз сказал правду

Смит раз солгал, раз сказал правду

Следовательно: 3 сказали поочередно правду и ложь, чего по условию быть не должно, значит, преступление совершил не Джонс.

2. Допустим, что преступление совершил Смит, тогда:

Браун дважды сказал правду

Джонс дважды сказал правду

Смит два раза солгал

По условию этого быть не может, значит, преступление совершил не Смит.

3. Допустим, что преступление совершил Браун, тогда:

Браун раз сказал правду, раз солгал

Джонс два раза солгал

Смит два раза сказал правду

По условию это допустимо. Мы получаем что преступление совершил Браун.

Ответ: Браун.

№ 6

Трех мудрецов – А, В и С усадили друг за другом так, что А видит и В, и С, В видит только С, а С никого не видит. Им показали 5 колпаков: 3 красных и 2 белых. Затем им завязали глаза и надели каждому на голову красный колпак, после чего сняли с них повязки. После этого их стали опрашивать, могут ли они определить цвет своего колпака. После того как А, а затем и В ответили отрицательно, С понял что на нем красный колпак. Как ему это удалось?

Решение: А может определить цвет своего колпака, только если видит на В белый колпак и на С белый колпак (тогда на А красный). Так как А не смог определить цвет своего колпака, то В и С понимают, что он не видит перед собой 2 белых колпака.

Если В видит на С белый копак, то он сразу поймет, что на нем красный колпак. Но так как он не смог определить цвет своего колпака, то значит он видит на С красный колпак.

Поэтому после того, как А и В не смогли определить цвет своих колпаков, С понял, что на нем может быть только красный колпак.

№ 7

Три мудреца - А, В и С – в совершенстве владеют логикой. Взяли четыре красные и четыре зеленые марки, завязали мудрецам глаза и каждому из них наклеили на лоб 2 марки. Затем сняли с их глаз повязки и по очереди задали А,В и С один и тот же вопрос: «Знаете ли вы, какого цвета марки у вас на лбу?» Каждый из них ответил отрицательно. Затем спросили еще раз у А и снова получили отрицательный ответ. Но когда вторично задали тот же вопрос В, он ответил утвердительно. Какого цвета марки на лбу у В?

Решение:

Если никто ничего не знает, то у каждого на лбу по красной и зеленой. Логика такая: 1) Допустим, кто-то из них видит перед собой 4 одинаковых марки. Здесь вывод простой - на мне обе марки другого цвета. 2) Если кто-то видит перед собой на одном лбу 2 одного цвета, на другом - обе другого. Рассуждает так: если на мне 2 марки одного цвета, то кто-то из них сразу догадался бы об этом исходя из вывода 1). Значит на мне 2 разные. Из заключений 1) и 2) следует, что из мудрецов нет 2-х, на лбу которых были бы марки одинаковые. Рассмотрим вариант, что есть только один мудрец с одинаковыми марками. 3) В таком случае, один из мудрецов видит перед собой 2 лба: кк кз (или зз кз) . И думает: если бы у меня было 2 одинаковых марки, то тот, у кого на лбу разные, посмотрев на нас, сделал бы вывод, исходя из вариантов 1) и 2). Значит у меня на лбу разные марки.

И тогда остается единственный вариант, что ни у кого нет одинаковых марок.

№ 8

На острове Буяне три селения. Жители Правдычина всегда говорят правду, жители Кривдина всегда лгут, а жители Середины-на-Половине говорят

попеременно то правду, то ложь. Однажды в пожарной части острова зазвонил телефон.
- Скорее приезжайте! У нас в селении пожар! – раздался в трубке взволнованный голос.
- В каком селении? – попытался уточнить дежурный.
- В Середине – на - Половине, - последовал ответ.
Как должен поступить дежурный?
Решение: Жители Правдычина всегда говорят правду, значит назвали бы свое селение. Так как произнесли Середина – на - Половине, жителей Правдычина откидываем. Остаются два селения:
1. Если пожар в Кривдине: они всегда лгут, то: В Середине-на-Половине – ложь, Пожар! – ложь.
2. Если пожар в Середине-на-Половину : В Середине – на – Половину – истина, тогда Пожар! – ложь.
Получаем в обоих рассматриваемых случаях информация про пожар – ложь. Дежурному не стоит ехать на место.

В задачах № 9 - № 12 действие происходит на острове, коренными жителями которого являются рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

№ 9

Человек А говорит «Я лжец» является ли он островитянином? –
Решение: Так как рыцари говорят только правду - такого быть не могло. Лжец сказать что он лжец тоже не может, следовательно человек, сказавший что он лжец не является островитянином.
Ответ: А не островитянин.

№ 10

Островитянин А в присутствие другого островитянина В говорит: «По крайней мере один из нас лжец». Кто они?

Решение: Предположим, оба они лжецы. Тогда утверждение «По крайней мере один из нас лжец» является правдой, а этого не может быть.

Предположим, они оба рыцари. Тогда утверждение «По крайней мере один из нас лжец» является ложью, а этого не может быть.

Т.е., так могло быть только при условии того что это сказал рыцарь, а второй был лжец.

№ 11

Есть три человека А,В и С. Известно что один из них - лжец, рыцарь и приезжий

А говорит: я приезжий

В говорит: А и С иногда говорят правду

С говорит: В приезжий

Решение: Сначала сделаем таблицу. Затем начнём рассуждать.

1) Начнём с того что А лжец и дальше будем разбирать каждый вариант решения задачи. И так если А лжёт говоря что он приезжий – что может быть. Тогда В рыцарем быть не может, так как он утверждает, что А иногда говорит правду, значит С рыцарь и из его слов следует то что В приезжий, который солгавший про то, что А иногда говорит правду и сказал правду о С, говорящем её.

	Л	Р	П
А	1	0	0
В	0	0	1
С	0	1	0

Этот вариант подходит, но так как эта задача может иметь не одно решение, мы продолжим разбирать её дальше.

2) Предположим что В лжец, А может быть только приезжим так как его слова не подходят для рыцаря, а С остаётся быть рыцарем – чего быть не может так как по нашему примеру В лжец а не приезжий. Этот вариант не подходит

3) Допустим что С лжец, значит В остаётся быть лишь рыцарем так как место лжеца занято, а В точно не приезжий, следовательно и такого быть не может

так как В говорит что А и С иногда говорят правду, а С не может говорить правду вообще. Этот вариант тоже не подходит.
Ответ: А – лжец, В – приезжий, С – рыцарь.

№ 12

Есть n островитян: А1, А2, … Аn. Каждый из них сказал «Все остальные лжецы» сколько среди них рыцарей?

Решение: Если среди А1, А2, … Аn все лжецы (нет рыцарей), тогда все они говорят правду, чего быть не может.
Значит, среди них должен быть хотя бы 1 рыцарь. Тогда его высказывание правдиво, и значит, все остальные лжецы и кроме него рыцарей среди них нет.
Ответ: 1 рыцарь, остальные лжецы.

№ 13

На столе стоят два одинаковых ящика. В каждом из них лежит либо белый, либо черный шарик. На одном из ящиков надпись: " В этом ящике лежит белый шарик, а в другом черный". На 2 ящике другая надпись: "В одном из этих ящиков лежит белый шарик, кроме того в одном из этих ящиков лежит черный шарик" Одна надпись истинна, а другая ложна. Есть ли в каком-нибудь ящике белый шарик? В каком, если есть?

Решение:

1) Допустим, в обоих ящиках белые шарики: ББ. Тогда ложны обе надписи, а это противоречит условию. То же самое со случаем двух черных шариков ЧЧ.
2) Если в первом ящике белый шарик, а во втором черный: БЧ. Тогда обе надписи истинны, что противоречит условию.
3) Если в первом ящике черный шарик, а во втором белый: ЧБ. Тогда первая надпись ложь, а вторая истина, что соответствует условию задачи.

Ответ: Белый шарик во втором ящике.

№ 14

На столе три одинаковых ящика. В одном белый шарик, в других черные. На каждом ящике надписи:

- в этом ящике находится черный шарик

- в этом ящике находится белый шарик

- Черный шарик во втором ящике

В каком белый, если не менее двух надписей ложь?

Решение:

1)Допустим, 1 и 2 надписи ложь (ЛЛИ), то в 1 ящике - белый, , а во 2 ящике – чёрный, и в и в 3 ящике - чёрный. То белый шарик в 1 ящике.

2)Допустим, 2 и 3 надписи ложь (ИЛЛ), то в 1 ящике - чёрный и во 2 ящике тоже черный, а раз 3 надпись ложь, то во втором ящике белый шарик. Противоречие, т.к. во 2 ящике одновременно лежит и белый, и чёрный шарики, а такого не может быть по условию.

3)Допустим, все надписи ложь (ЛЛЛ), то в 1 ящике - белый, 2 ящике - чёрный, но так как 3 надпись ложь, то во втором ящике должен быть белый шарик, мы снова получаем противоречие.

Ответ: Белый шарик в первом ящике..

2. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

§1. Определение и простейшие свойства делимости

Определение. Говорят, что целое число a делится на целое число b, если существует такое целое c, что a=bc.

Например, 72 делится на 8, так как 72=8·9; 111 делится на 37, так как 111=37·3; 21 делится на-7, так как 21=(-7)·(-3). Отметим, что всякое число a делится на a, -a, 1,-1.

Конечно, в случае b $\neq$0 утверждение «a делится на b» просто означает, что частное $\frac{a}{b}$ является целым числом. Неинтересный случай b=0 по ряду причин все же удобно не исключать из рассмотрения. Поэтому обратим внимание на то, что число 0 делится на любое целое число, включая 0, но ни одно целое число, отличное от нуля, на нуль не делится.

Часто утверждение о делимости a на b выражают другими словами: a кратно b, b - делитель a, b делит a. Для обозначения делимости a на b пользуются записью: a⁝b.

Теперь сформулируем несколько простых свойств делимости.

1. Если a и b делятся на c, то a+b и a-b делятся на c. Часто это свойство применяют в таком виде: если в равенстве a+b=c два числа делятся на d, то и третье число делится на d.

2. Если a делится на b, и c - произвольное целое число, то ac делится на bc.

3. Если a делится на b, и b делится на c, то a делится на c.

4. Если a делится на b, и b делится на a, то a=b или a=b.

Покажем для примера, как доказывается свойство 3. Так как по условию a делится на b, то a=bм, где м-целое число. Кроме того, b делится на c, и поэтому b=cn, где n-целое число. Откуда a-(cn)m=c(nm) и, значит, делится на c.

Задачи

1. Выясните, какие из следующих утверждений верны, а какие нет:

в) если a не делится на цело6 и b не делится на цело 6, то ab не делится на цело 6

Решение в). Утверждение неверно, так как, например, если a=2, b=3, но ab⁝6.

2. Докажите утверждения:

б) $3^{11}+5^{11}$⁝8;

в) $2^{22}+3^{11}$⁝7;

.д) если a^2⁝a+b, то b^2⁝a+b.

ж) если a^n⁝a-b, то b^n⁝ a-b;

з) если a^n⁝a+b, то b^n⁝a+b.

Решение д) так как a^2-b^2=(a-b)(a+b), то a^2-b^2 делится на a+b. По условию a^2 делится на a+b. Значит по свойству1 и b^2 делится a+b.

Для решения задач б),в),ж),з) полезно воспользоваться тем, что для любого n имеет место равенство

A^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}+ a^{n-2}·b+…+a·b^{n-2}+b^{n-1P}) и для любого нечетного n имеет место равенство

A^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+…-ab^{n-2}b+b^{n-1}). В справедливости этих равенств нетрудно убедиться, раскрыв скобки.

5.выясните при каких n справедливы утверждения:

б) $\frac{4n+3}{5n+2}$ - целое число.

Решение б). если при некотором значении n число $\frac{4n+3}{5n+2}$является целым, то при том же значении n число $\frac{20n+15}{5n+2}$также является целым. Так как $\frac{20n+15}{5n+2}$ =4+$\frac{7}{5n+2}$, то число $\frac{20n+15}{5n+2}$ является целым, только если 7 делится на 5n+2. Имеем следующие возможности: 5n+2=-1, 5n+2=1, 5n+2=-7, найденное значение n является решением задачи.

При решении следующих задач полезно иметь в виду, что если b-делитель, a, и, значит, a=bc, где с-целое число, то также и с-делитель a (с называют делителем, дополнительным к b).

Задачи § 1

№ 1

Верным или неверным является утверждение: «Если a не делится на 6 и b не делится на 6, то (a + b) не делится на 6»?

Решение: Утверждение неверно так как например: a = 1; b = 5

Тогда a не делится на 6, b не делиться на 6, а (a + b) делиться на 6: (1 + 5):6=1.

Ответ: утверждение неверно

№ 2

Верным или неверным является утверждение: « Если a⋮6 и b⋮10, то ab⋮60»?

Решение: Если a⋮6, то a = 6n, где n – целое. Если b ⋮10, то b = 10m, где m – целое.

Тогда ab = 6n·10m = 60mn⋮60, ч.т.д.

Ответ: утверждение верно

№ 3

Докажите, что (a^2+b^2) ⋮c, если ab⋮c и (a+b) ⋮c.

Доказательство: a^2+b2=$a^2 + b^2 + 2ab - 2ab = (a+b)^2 - 2ab$

1) Если a + b ⋮c, то $(a+b)^2$⋮c по свойству делимости

2) Если ab ⋮c, то 2ab ⋮c по свойству делимости ,

3) Так как $(a+b)^2$⋮c и 2ab ⋮c, то и $(a+b)^2-2ab$ ⋮c, следовательно (a^2+b^2) ⋮c, ч.т.д.

№ 4

При каких значениях n выражение $3n^2 + 2n + 2$ делится на 4n + 3?

Решение: Если $3n^2 + 2n+2$ ⋮4n+3, то 4(3n2+ 2n+2) ⋮4n+3 по свойству делимости, т.е. их частное является целым числом.

$$\frac{12n^2+8n+8}{4n+3}=\frac{12n^2+9n-n+8}{4n+3}=\frac{12n^2+9n}{4n+3}+\frac{8-n}{4n+3}=3n+\frac{8-n}{4n+3}$$

Для того, чтобы $3n^2+2n+2 \vdots 4n+3$, нужно чтобы $\frac{8-n}{4n+3}$ было целое, рассмотрим все варианты:

1) при n=1: $\frac{8-1}{4+3}=\frac{7}{7}=1$, n=1 нам подходит

2) при $n\geq 2$;$n\neq 8$ выражение $\frac{8-n}{4n+3}$не будет целым т.к.числитель по модулю меньше знаменателя

3) при $n=8$; $\frac{0}{35}=0$, значит, n=8 нам подходит

4) при $n=-1$; $\frac{9}{-1}=-9$, значит, n=−1 нам подходит

5) при $n=-2$; $\frac{10}{-5}=-2$, значит, n=−2 нам подходит

6) при $n=-3$; $\frac{11}{-9}$ не явл целым

7) при $n\leq -4$ выражение $\frac{8-n}{4n+3}$не будет целым т.к.числитель по модулю меньше знаменателя.

Ответ: n=1; 8; −1; −2

§2. Деление с остатком

Пусть a и b-целые числа. Предположим сперва, что b>0 и отметим на числовой оси все целые числа, кратные b.

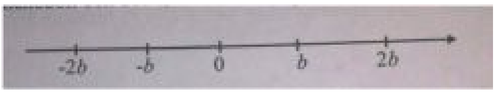


Рис.1

Отмеченные числа разобьют числовую ось на промежутки, и число a попадет в один из них: qb≤ a <(q+1)b. Обозначим разность a-gb буквой r и отметим, что 0 r b. (q+1)b Итак, если b>0, то число a можно представить в виде a-gb буквой r и отметим, что 0≤r <b.

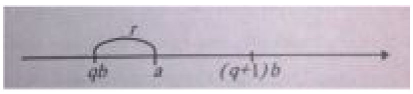


Рис.2

Итак, если b>0, то число a можно представить в виде a=qb+r,где q и r-целые числа, причем 0≤r<b.

Представим теперь, что $b<0$. Тогда $-b>0$ и, значит, число можно представить в виде $a=l(-b)+r$, где l и r-целые числа, причем $0\leq r<-b$. Записав последнее равенство в виде $a=(-l)b+r$, мы получим, что и в случае $b<0$ можно найти такие целые числа q и r, что $a=qb+r$ и $0\leq r<|b|$.

Покажем теперь, что числа q и r однозначно определяются числами a и b. Пусть $a=q_1b+r_1$, $a=q_2b+r_2$, $0\leq r_1,r_2<|b|$. Тогда $q_1b+r_1=q_2b+r^2$, $b(q_1-q_2)=r_2-r_1$. Если $q_1\neq q_2$, то $|b(q_1-q_2)|\geq|b|$, и из этого равенства $b(q_1-q_2)=r_2-r_1$ вытекает, что $|r_2-r_1|\geq|b|$,а это противоречит условию $0\leq r_1,r_2<|b|$. Значит, $q_1=q_2$, тогда и $r_1=r_2$.

Сформулируем доказанное нами утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть a и b-целые числа и $b\neq 0$. Существует единственная пара чисел q и r, таких, что $a=gb+r$ и $0\leq r<|b|$.

Число q называют в этом случае неполным частным, а число r-остатком. Равенство нулю остатка означает, конечно, что число a делится на b. Нахождение по числам a и b неполного частного и остатка называется делением a на b.

Приведем несколько примеров. Так, 12 при делении на 5 дает остаток 2, так как $12=5\cdot 2+2$; -13 при делении на 6 дает остаток 5, так как$-13=6(-3)+5$. Конечно, справедливо и равенство $-13=6(-2)-1$,но-1 не является остатком, так как остаток должен быть неотрицательным. Верно также и равенство $-13=6(-4)+11$, но остаток от деления на 6 должен быть меньше 6. Если известно, что число a при делении на 3 дает остаток 2, то его можно представить в виде $a=3n+2$, где n-некоторое целое число (неизвестное нам неполное частное). Конечно, это же число можно представить и в другом виде, например $a=3m-1$, при некотором целом м.

(возьмите $m=m+1$). Числа, которые при делении на 4 дают остаток 3, имеют вид $4n+3$ (их же можно представить $4n-1$). Таким образом, всякое нечетное число можно представить либо в виде $4n+1$. либо в виде $4n-1$. Произведение чисел вида $4n+l$ есть число вида $4n+1$ Действительно,

$$(4n_1+1)(4n_2+1)=16n_1n_2+4(n_1+n_2)+1=4(4n_1n_2+n_1+n_2)+1.$$

Так же доказывается, что произведение числа вида $4n+1$ на число вида $4n-1$ есть число $4n-1$, а произведение двух чисел вида $4n-1$ есть число вида $4n+1$ (докажите эти утверждения самостоятельно).

Для целых чисел, заданных десятичными записями, существует известный всем простой способ деления с остатком - это деление «в столбик».

Задачи

1.Какой остаток дает число:

а) 7n-2 при делении на 7; б) 4n+3 при делении на n?

(n-целое число.)

Решение а). 7n-2=7n-7+5=7(n-1)+5. Значит, остаток равен 5.

Решение б). Если $|n|>3$, то остаток равен 3; осталось рассмотреть случай n=0, n=±1, n=±2, n=±3. При n=0 делитель равен 0, делимое отлично от 0, поэтому остаток не определен. При n=l и при n=-1 остаток равен 0; если n=2 или 7-2, остаток равен 1: если n-3 или n=-3, остаток равен 0.

2. Докажите что, если 2а :3, то а:3

Решение: Будем рассуждать от противного. Пусть а не делится на 3. Тогда остаток от деления а на 3 может быть равен 1 или 2. Если остаток равен 1, то а=3q+1, 2a=6q+2, что противоречит условию 2a⁝3. Если остаток равен 2, то а=3q+2 и 2a=6q +4, что тоже противоречит условию 2a⁝3.

Задачи § 2

№ 5

Какой остаток даёт число 4n+3 при делении на 2n+1 (n-целое число)?

Решение: 4n+3=4n+2+1=2(2n+1)+1, т.е. остаток равен 1.

Ответ: 4n+3 при делении на 2n+1 дает остаток 1.

№ 6

Найдите наибольшее четырехзначное число, кратное 31.

Решение: Для начала возьмём самое большое четырехзначное число: 9999 и поделим его на 31, 9999:31≈322,55. Мы получили целую часть 322, умножаем ее на 31: 322·31=9982. У нас получилось число 9982, которое является наибольшим четырехзначным числом, кратным 31.

Ответ: 9982.

№ 7

Остаток от деления нечетного числа на 7равен 2. Найдите остаток от деления этого же числа на 14.

Решение: Представим число в виде а=7n+2. Чтобы а было нечетным числом, нужно, чтобы 7n тоже было нечетным числом, а значит, и n тоже нечетное. Если же n нечетное, то его мы запишем в виде n=2m+1, где m − целое, тогда

$a=7(2m+1)+2=14m+7+2=14m+9$, значит, остаток от деления на 14 этого числа равен 9.

Ответ:9.

№ 8

Число 100 разделили на некоторое число, меньше 50, и получили в остатке 6. На какое число делили 100?

Решение: Мы знаем, что у нас остаток 6 при делении 100 на данное число, следовательно, мы из 100 вычтем 6, 100-6=94. Выясним, каким числам кратно 94? 94 делится на 1, 2, 47 и 94. 94 не подходит по условию задачи, т.к. оно больше 50. 2 не подходит, т.к. остаток (6) не может быть больше делителя. Остается число 47. Проверим: 100:47=2 (остаток 6). При делении 100 на 47, дает остаток 6 и 47 ‹ 50. Условие выполнено. Также подойдут числа −47 и – 94, т.к. они тоже меньше 50 и при делении на них получается остаток 6.

Ответ: 47; −47; −94.

№ 9

Может ли число делиться на 8,а при делении на 12 давать остаток 10?

Решение: Пусть число a при делении на 12 дает остаток 10: $a=12x+10$, ГД x – целое.

Если число $a⋮8$, тогда $a=8y$, где y – целое.

$12x+10=8y$

$6x+5=4y$

4y четное число при любом y.

$6x+5=6x$ - четное число для любого x, а 5 нечетное число. Сумма четных и нечетных даёт нечётное число, то есть левая часть уравнения четная, а правая нечетная. Значит, уравнение не имеет решений в целых числах.

Ответ: Нет, число не может делиться на 8, а при делении на 12 давать в остатке 10.

№ 10

Пифагоровым треугольником называется прямоугольный треугольник, длины сторон которого выражаются целыми числами. Примером такого треугольника является треугольник со сторонами 3, 4, 5. Докажите, что во всяком пифагоровом треугольнике с катетами a, b и гипотенузой c хотя бы одно из чисел a или b четно.

Доказательство: Предположим, что a нечетно и b нечетно: $a=2k-1$, $b=2m-1$, где k и m целые. Тогда $c^2=a^2+b^2=(2k-1)^2+(2m-1)^2=4k^2-4k+1+2m^2-4m+1=4k(k-1)+1+4m(m-1)+1$. k и k–1 – два посл. числа, следовательно одно из них четное, т.е. $4k(k-1)⋮8$. Тогда получаем, что $c^2 = 4k(k+1)+4m(m+1)+2$ при делении на 8 дает в остатке 2, а также при делении на 4 дает $c^2=8n+2=4\cdot 2n+2$. Т.е. c^2 четное, но не⋮4, а такое число не может быть квадратом четного числа. Следовательно наше предположение, что a и b нечетные, неверно, следовательно хотя бы одно из чисел a и b четно, ч.т.д.

§3. Признаки делимости

Если числа a и b записаны в десятичной системе счисления, то, разделив «в столбик» первое число на второе, мы сможем ответить на вопрос, делится ли a на b. Теперь же речь пойдет о признаках, позволяющих в ряде случаев довольно быстро установить, делится ли одно число на другое, не прибегая непосредственно к делению «в столбик».

Мы коснемся только самых простых, наиболее употребительных признаков делимости:

а) делимости на 2 нужно, что последняя цифра числа делилась на 2;

б) для делимости на 3 нужно, чтобы сумма цифр числа делилась на 3:

в) для делимости на 4 нужно, чтобы число, записываемое двумя последними цифрами, делилось на 4:

г) для делимости на 5 нужно, чтобы последняя цифра числа была 0 или 5;

д) для делимости на 8 нужно, чтобы число, записываемое тремя последними цифрами, делилось на 8:

е) для делимости на 9 нужно чтобы сумма цифр числа делилась на 9:

ж) для делимости на 10 нужно, чтобы последняя цифра числа была 0

з) для делимости на 11 нужно, чтобы разность между суммой цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делилась на 11.

Приведем для примера доказательство признаков в) и е).

Доказательство в). Пусть n-произвольное натуральное число. Запишем его в виде n=a+10b+100c+..., где a-число единиц, b-число десятков, c-число сотен и так далее. Так как все слагаемые в этой сумме, начиная с третьего, делятся на 4, то для делимости числа n на 4 нужно, чтобы на 4 делилось число a+10b. Но a+10b это и есть число, записанное двумя последними цифрами числа n.

Доказательство е). Запишем число n в виде n=a+10b+100c+…=a+(b+9b)+(c+99c)+…=(a+b+c…)+(9b+99c+…). Так как число 9b+99c+... делится на 9, то для делимости на 9 числа n нужно, чтобы на 9 делилось число a+b+c+..., то есть сумма цифр числа n. Отметим, что попутно мы доказали следующий факт: разность между числом и суммой его цифр делится на 9.

для доказательства признаков делимости мы представляли произвольное натуральное число n в виде n=a+10b+100c+… . Так, для числа 2374 такое представление имеет Вид $2374=4+7\cdot10+3\cdot100+2\cdot1000$. Однако бывает удобнее записывать слагаемые и в обратном порядке: 2374-2-1000-3.100-7-10-4. В такой записи цифры 2, 3, 7, 4 появляются в том же порядке: $2374=2\cdot1000+3\cdot100+7\cdot10+4$. В такой записи цифры 2,3,7,4, появляются в том же порядке, в котором расположены в десятичной записи числа. В общем случае, если $a_1,a_2,a_3,\ldots a_k$-десятичные цифры k-значного числа n, то $n=a_1\cdot10^{k-1}+a_2\cdot10^{k-2}+a\cdot10^{k-3}+\ldots+a_k$.

К признакам делимости мы еще вернемся в §9.

Задачи § 3

№ 11

Десятичная запись числа состоит из трехсот единиц и некоторого количества нулей. Докажите, что это число не является квадратом никакого целого числа.

Доказательство: Сумма цифр этого числа равна 300, значит, про признаку делимости оно делится на 3, т.е. один из его множителей равен 3. Если это число является квадратом целого числа, то каждый множитель должен входить в состав числа дважды, т.е. раз число делится на 3, то оно должно делиться и на $3\times3=9$. Но по признаку делимости это число не делится на 9, следовательно, оно не может быть квадратом целого числа.

№ 12

Докажите, что никакая степень числа 2 не оканчивается четырьмя одинаковыми цифрами.

Доказательство: Т.к. степень двойки четное число, то эти цифры должны быть четными. Если это четыре 0, то это число делится на 10, т.е. кроме двойки, делится еще и на 5, что невозможно. Если же число оканчивается на 2222, 4444, 6666, 8888 , то при делении этого числа на 2 один, два или три раза мы получим нечетное число, что для степени двойки невозможно. Значит, степень двойки на 4 одинаковые цифры оканчиваться не может, ч.т.д.

§4. Наибольший общий делитель

Определение. Пусть a, b-целые числа, из которых по крайней мере одно отлично от нуля. Наибольшим общим делителем чисел a и b называется наибольшее натуральное число, являющееся делителем как a, так и b.

Аналогично определяется наибольший общий делитель в случае большего количества чисел. Приведем несколько примеров. Так, наибольший общий делитель чисел -8 и 10 равен 2, чисел 0 и 4 равен 4, чисел 14 и 15 равен 1. Наибольший общий делитель чисел 15, 18, 39 равен 3.

Наибольший общий делитель, a и b обозначается НОД(a,b), а иногда просто (a,b).

Определение наибольшего общего делителя дает и способ найти его: выписать все общие делители данных чисел и выбрать них наибольший. Для примера найдем НОД(42,36). Для этого выпишем сначала натуральные делители 42: l, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42 и из них выберем числа, являющиеся делителями числа 36. Получим 1, 2, 3, 6. Это все общие делители чисел 42 и 36. Значит, НОД(142,36)=6.

В дальнейшем мы познакомимся с другими способами нахождения наибольшего общего делителя. Теперь введем еще одно понятие.

Определение. Пусть a, b-целые числа, отличные от нуля. Наименьшим общим кратным этих чисел называется наименьшее натуральное число, кратное этим числам.

Наименьшее общее кратное в случае большего количества чисел определяется аналогично. Примеры: наименьшее общее кратное чисел 8 и 10 равно 40, чисел -4 и 6 равно 12, чисел 4, 10 и 15 равно 60.

Задачи

1. Найдите: НОД(2n+3,n+1);

Решение: Пусть d- наибольший общий делитель чисел 2n+3 и n+1. Тогда 2n+3 и n+1 делятся на d. Отсюда2(n+1) делится на d, а значит, на d делится и разность 2n+3-2(n+1)=1, откуда d=1.

2. Какие значения может принимать наибольший общий делитель чисел n^2 и 2n-5

Решение: Пусть d-наибольший общий делитель чисел n^2, и 2n-5. Тогда числа $2n^2$ и n(2n-5), а также и их разность 5n делятся на d. Далее, так как числа 2n-5 и 5n делятся на d, то числа 10n и 5(2n-5), а также и их разность 25 делятся на d. Таким образом, имеем следующие возможности: d=1, d=5, d=25. Осталось проверить, какие из них в действительности осуществляются. Беря значения n=1, n=5 n=-10, мы видим, что осуществляются все возможности.

Задачи § 4

№ 13

Найдите НОД(420, 525)

Решение: Разложим данные числа не простые множители:

420	2
210	2

525	3
175	5

105	3
35	5
7	7
1	

35	5
7	7
1	

Общими делителями являются 3; 5; 7. НОД(420, 525)= 3·5·7=105

Ответ: НОД(420, 525)=105

№ 14

Найдите, чему может быть равен НОД (3n+1; 7n–4)?

Решение: Пусть НОД (3n+1; 7n–4)=d

Т.к. (3n+1) ⋮ d, то 7·(3n+1) ⋮d по свойству делимости. Т.к.(7n–4) ⋮ d, то 3·(7n-4) ⋮d

Т.е. 21n+7 ⋮d и 21n-12 ⋮ d

Если эти выражения делятся на d, то на d делятся и их разность (21n+7)–(21n–12)=19⋮d, следовательно d=19 или 1.

Если n=1; НОД(4;3)=1

n=6; НОД(19;38)=19

Ответ: НОД может быть равен 19 или 1.

№ 15

Найдите наибольший делитель всех чисел, в записи каждого из которых все цифры 1,2,…,9 использованы по одному разу.

Решение: 1+2+3…………+9=45

Сумма цифр каждого такого числа равна 45, следовательно по признаку деления каждое такое число делится на 9. Докажем что 9 это НОД этих чисел.

Возьмем для примера 2 числа 123456789 и 123456798. Так как они оба делятся на НОД, то делиться на НОД должна и их разность:

123456798–123456789 =9 следовательно НОД не может быть больше 9, следовательно 9 это НОД.

Ответ: 9

§5. Алгоритм Евклида

Опишем теперь способ нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, известный под названием «Алгоритм Евклида». Он основан на следующем утверждении:

1. Совокупность общих делителей чисел a и b совпадает с совокупностью общих делителей чисел a-b и b. В частности,

НОД (a,b)=НОД (a-b,b).

Докажем это. Пусть с - общий делитель чисел a и b. Тогда a-b делится на C и, значит, с - общий делитель чисел a-b и b. Обратно, пусть с-общий делитель чисел a-b и b. Тогда число $(a\text{-}b)+b=a$ делится на C, и значит, с - общий делитель чисел a и b.

Итак, если большее из двух имеющихся натуральных чисел заменить разностью между ним и меньшим, то у получившихся двух чисел наибольший общий делитель будет тот же, что у исходных.

Переходим теперь к описанию алгоритма Евклида.

Нахождение наибольшего общего делителя осуществляется за несколько шагов. На каждом шаге большее из двух имеющихся чисел заменяют разностью между ним и меньшим и так до тех пор, пока одно из чисел не окажется равным нулю. Другое отличное от нуля число и есть искомый наибольший делитель.

Приведем пример: (100,70); (30,70); (30,40); (30,10); (20,10); (10,10); (10,0). Итак, НОД(100,70)= 10.

Алгоритм Евклида приводит к следующему важному утверждению.

2. Всякий общий делитель двух чисел является делителем их наибольшего общего делителя.

Для доказательства достаточно заметить, что на каждом шаге в алгоритме Евклида получается пара целых чисел с тем же набором делителей, что и у исходной. Таким образом, совокупность общих делителей исходной пары чисел *a,b* совпадает с совокупностью общих делителей последней пары *d,0* , то есть с совокупностью делителей d. С другой стороны, мы знаем, что d - наибольший общий делитель чисел *a* и *b*. Утверждение доказано.

Вернемся теперь к алгоритму Евклида и выясним, какого вида числа могут получаться из исходных. Так, если были заданы натуральные числа *a* и *b,* причем a=b или a>b, то на первом шаге из них получают числа *a-b* и *b*. Далее, получившиеся числа сравнивают. Если *a-b*>b или a-b=b, то на втором шаге числа *a-b, b* заменяют числами *a-2b, b,* а если *a-b<b или a-b=b,* то числами *a-b* и **2***b-a,* и так далее. (На третьем шаге кроме перечисленных могут встретиться числа a-3*b,* 3*b-a. 2a-3b, 2b-2a).* Таким образом, в алгоритме Евклида из исходных чисел a и *b* могут получаться лишь числа вида *d=au+bv,* где *u* и v- целые числа. В частности, и наибольший общий делитель чисел *a* и *b* имеет такой вид.

Сформулируем полученное утверждение.

3. Пусть a,b - целые числа**,** d - их наибольший общий делитель. Тогда существуют такие целые числа *u* и v, что d=au+bv.

Это важное свойство наибольшего общего делителя мы будем неоднократно применять.

Давайте снова вернемся к алгоритму Евклида и приведем еще один пример вычисления наибольшего общею делителя. Найдём НОД(945,301); Последовательность шагов в алгоритме Евклида такова: (945,301); (644,301); (343,301); (42,301); (42,259); (42,217); (42,175); (42,133); (42,91); (42,49); (42,7); (35,7); (28,7); (21,7); (14,7); (7,7); (7,0). Итак, НОД(945,301)=7.

Количество действий можно заметно сократить, если заменить многократное вычитание одного и того же числа делением с остатком. Так, в нашем примере вместо того, чтобы семь раз вычитать 42, можно было разделить 301 на 42 с остатком: 301=42*7+7. В такой сокращенной записи алгоритм Евклида для чисел 945 и 301 будет выглядеть так:

945=301*3+42, (*)

301=42*7+7,

42=7*6.

Аналогично можно поступить и в общем случае. Так, обозначив исходные числа буквами ***a*** и ***b*,** положительные остатки, получающиеся в результате делений, -$r_1, r_2, \ldots r_n$, *а* неполные
частные –$q_1, q_2, \ldots q_n$, можно записать алгоритм Евклида в виде
цепочки равенств:

$a=q_1b+r_1$,

$b=q_2r_1+r_2$,

$r_1=q_3r_2+r_3$,

…,

$r_{n-2} = q_nr_{n-1} +r_n$,

$r_{n-1}=q_{n+1}r_n$.

Итак, наибольший общий делитель двух натуральных чисел можно находить следующим образом. Сначала большее число разделить с остатком на меньшее, затем второе число разделить на остаток от первого деления, потом первый остаток - на второй, и так далее. Последний ненулевой остаток в этом процессе и будет наибольшим общим делителем данных чисел.
Мы получили два описания алгоритма Евклида. Одно состоит в последовательности вычитаний, а другое — в последовательности делений с остатком. В каждом конкретном случае мы будем пользоваться тем из них, который удобнее.

Наконец, покажем на примере, как для данных чисел *a* и *b* и их общего делителя d найти пару таких u и v, что $d=au+bv$. Пусть $a=945$ и b=301. Мы знаем, что d=7. Из первой строки равенств (*) получаем, что 42=945-3*301 =a-3b, из второй строки 7=301-42*7= $=b-(a-3b)*7=22b-7a$.

Задачи § 5

№ 16

Найдите НОД (391, 253)

Решение: Для нахождения НОД можно воспользоваться алгоритмом Евклида:

(391, 253) (138, 235) (138, 115) (23, 115) (23, 92) (23,69) (23, 46) (23,23) (23,0)

НОД (391, 253)=23

Ответ: 23

№ 17

Найдите представление наибольшего общего делителя чисел 391 и 253 в виде $d = 391u + 253v$

Решение:

$391 = 253\cdot 1 + 138$ $\quad 138 = 391 - 253$

$253 = 138\cdot 1 + 115$ $\quad 115 = 253 - 138 = 253 - 391 + 253 = 2\cdot 253 - 391$

$138 = 115\cdot 1 + 23$ $\quad 23 = 138 - 115 = 391 - 253 - 2\cdot 253 + 391 = 2\cdot 391 - 3\cdot 253$

$115 = 23\cdot 5$

Т.е. $u = 2$; $v = -3$

Ответ: 23=**2** ·391 **– 3** ·253

№ 18

Найдите хотя бы одно решение уравнения $117x + 92y = 1$ в целых числах.

Решение:

$117 = 92\cdot 1 + 25$ $\quad 25 = 117 - 92$

$92 = 25\cdot 3 + 17$ $\quad 17 = 92 - 25\cdot 3 = 92 - 3\cdot(117 - 92) = 92 - 3\cdot 117 + 3\cdot 92 = 4\cdot 92 - 3\cdot 117$

$25 = 17\cdot 1 + 8$ $\quad 8 = 25 - 17 = 117 - 92 - 4\cdot 92 - 3\cdot 117 = 4\cdot 117 - 5\cdot 92$

$17 = 8\cdot 2 + 1$ $\quad 1 = 17 - 2\cdot 8 = 4\cdot 92 - 3\cdot 117 - 2(4\cdot 117 - 5\cdot 92) = 4\cdot 92 - 3\cdot 117 - 8\cdot 117 + 10\cdot 92 = 14\cdot 92 - 11\cdot 117$

$8 = 8\cdot 1$

Т.е. **– 11** ·117 + **14** ·92 = 1

Ответ: x=–11; y=14.

§6. Взаимно простые числа (9 класс)

Определение. Числа a и b называются взаимно простыми, если их наибольший общий делитель равен 1.

Например, числа 10 и 21 взаимно просты, а числа 10 и 15 взаимно простыми не являются.

Сформулируем несколько утверждений.

1. Числа a и b взаимно просты тогда и только тогда, когда найдутся такие целые числа u и v, что $au+bv=1$.

Доказательство. Если числа a и b взаимно просты, то есть, НОД(a,b)=1, то существования u и v вытекает из утверждения 3 §5. Обратно, пусть $au+bv=1$ при некоторых целых u и v. Если d- наибольший общий делитель чисел a и b, то $1=au+bv$ делится на d, откуда $d=1$.

2. Если a и c взаимно просты, b и c взаимно просты, то ab и c взаимно просты.

Доказательство. По утверждению 1 найдутся такие числа u_1 и v_1, что $au_1+cv_1=1$, и такие u_2 и v_2, что $bu_2+cv_2=1$. Перемножая эти равенства, получаем $abu_1u_2+c(au_1v_2+bu_2v_1+cv_1v_2)=1$.

Откуда, опять на основании утверждения 1, ab и c взаимно просты.

3. Если ab делится на c, и числа b и c взаимно просты, то a делится на c.

-Умножая обе части этого равенства на a, получаем $abu+acv=a$, так как ab делится на c по условию, то и a как сумма чисел abu и acv делится на c.

4. Если a делится на b, a делится на c, и числа b и c взаимно просты, то a делится на bc.

Доказательство. По утверждению 1 найдутся такие целые числа u и v, что $bu+cv=1$. Умножая обе части этого равенства на a, получаем $abu+acv=a$. Так как a делится на c по условию, то abu делится на bc. Поскольку a делится на b, acv также делится на bc. Значит, $a=abu+acv$ делится на bc.

Пример 1. Пусть НОД(a,b)=d. Докажите, что целые числа $\frac{a}{\mathrm{d}} \cdot \frac{b}{\mathrm{d}}$ взаимно просты. Обратно, если a и b делятся на d, причем числа $\frac{a}{\mathrm{d}} \cdot \frac{b}{\mathrm{d}}$ взаимно просты, то НОД(a,b)=d.

Решение. Пусть НОД(a,b)=d. По утверждению 3 §5 найдутся такие целые числа u и v, что d=au+bv, откуда $\frac{a}{\mathrm{d}}u+\frac{b}{\mathrm{d}}v = 1$ и, значит, по утверждению 1 этого параграфа числа $\frac{a}{\mathrm{d}}$ и $\frac{b}{\mathrm{d}}$ взаимно просты. Обратно, если числа $\frac{a}{\mathrm{d}}$ и $\frac{b}{\mathrm{d}}$ взаимно просты, то найдутся такие целые числа u и v, что $\frac{a}{\mathrm{d}}u+\frac{b}{\mathrm{d}}v = 1$, откуда получаем d=au+bv. Таким образом, если d_1 – какой-нибудь общий делитель чисел a и b, то d делится на d_1. Значит, d – наибольший общий делитель a и b.

Задачи § 6

№ 19.

Докажите, что любое нечетное число и половина следующего за ним четного числа взаимно просты.

Доказательство: в общем виде:2n-1-нечетное число

2n-следующее за ним чётное

n-половина нечетного числа

По алгоритму Евклида найдем НОД(2n-1;n)=НОД(n-1;n)=НОД(n-1;1)=1 . Значит это взаимно простые числа, ч.т.д.

№ 20

Докажите, что произведение пяти последовательных целых чисел делится на 120.

Доказательство: Среди пяти последовательных чисел одно делится на 5, по крайней мере, одно делится на 3. Также среди пяти последовательных чисел найдется два числа, одно из которых делится на 2, и одно, которое делится на 4. Значит, произведение пяти последовательных чисел будет делиться на произведение 2·3·4·5 , то есть на 120. ч. т.д.

№ 21

Нечетные числа a и b таковы, что a-b=64. Найдите НОД(a,b).

Решение: По алгоритму Евклида НОД(a,b)=НОД(a-b,b)=НОД(64;b)

b по условию нечетное число, $64=2^6$ => они будут взаимно простыми, а значит НОД(a,b)=1

Ответ:1

§7. Линейные уравнения с двумя переменными.

Рассмотрим уравнение вида ax+by=c, где a,b,c – целые числа, причем хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля. Мы хотим найти все целые числа x,y, которые удовлетворяют этому уравнению. Обозначим буквой d наибольший общий делитель чисел a и b. Тогда $a=da_1$, $b=ab_1$, где a_1,b_1 – взаимно простые числа, и исходное уравнение запишется в виде $da_1x+db_1y=c$. Ясно, что если c на d не делится, то это уравнение решений в целых числах x,y не имеет. Если же c на d делится , то $c=dc_1$, где c_1 – целое число, и наше уравнение сводится к уравнению $a_1x+b_1y=c_1$.

Итак, задача свелась к исследованию уравнения:

$$ax + by = c \qquad (*)$$

при взаимно простых a и b.

Предположим, что нам известно какое-нибудь решение (x_0, y_0) уравнения (*). Пусть (x_1, y_1) – другое решение этого уравнения. Тогда справедливы равенства $ax_0 + by_0=c$, $ax_1 + by_1=c$. Вычитая первое равенство из второго, получаем $a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0) = 0$, или $a(x_1-x_0) = - b(y_1-y_0)$. Так как левая часть последнего равенства делится на b, и числа a и b взаимно просты, то x_1-x_0 делится на b (см. утверждение 3 §6), то есть $x_1-x_0 = bt$, где t – целое число. Подставляя это выражение для $y_1-y_0 = -at$. Итак, $x_1 = x_0+bt$, $y_1 = y_0-at$. Легко проверить (подстановкой в уравнение (*)) и то, что при любом целом t пара чисел ($x_0 + bt$,$y_0 – at$) является решением уравнения (*).

Таким образом, если нам известно какое-нибудь решение уравнения (*), то мы можем указать все его решения.

Осталось доказать, что уравнение (*) имеет хотя бы одно решение. По утверждению 1 §6 существует такие целые числа u и v, что au+bv=1. Тогда пара чисел (cu,cv) дает решение уравнения (*).

Сформулируем доказанное утверждение.

ТЕОРЕМА. Уравнение ax+by=c, где a,b – взаимно простые числа, имеет бесконечно много решений в целых числах, причем если (x_0, y_0) – какое-нибудь его решение, то все решения этого уравнения имеют вид (x_0+bt,y_0-at), где t- целое число.

При решении конкретных уравнений бывает так, что одно из решений легко угадывается, как, например, в уравнении 3x-2y=1 одно из решений есть x_0=1, y_0=1. Тогда сразу же находятся и все решения: x=1-2t, y=1-3t. В качестве другого примера рассмотрим уравнение 945x+301y=14. В §5 мыс помощью алгоритма Евклида получили, что НОД(945,301)=7. Так как правая часть нашего уравнения делится на 7, то это уравнение имеет бесконечно много решений. Разделив обе части исходного уравнения на 7, получим уравнение 135x+43y=2. Для того, чтобы отыскать все решения этого уравнения, нужно сначала найти какое-нибудь одно. В конце §5 получено представление числа 7 в виде 7=945·(-7)+301·22. Отсюда получаем, что 1=135·(-7)+43·22, или, домножая на 2, что 2=135·(-14)+43·44. Таким образом, все решения нашего уравнения находятся по формулам x= -14+43t, y=44-135t, где t – целое число.

Исследовать в общем виде решение в целых числах уравнений с двумя переменными степени больше единицы совсем непросто. Однако в нескольких частных случаях эта задача вполне нам под силу.

Задачи § 7

№ 22

Решите в целых числах уравнение 7x-6y=1

Решение: очевидно, что x=1, y=1 является решением данного уравнения.

Тогда все решения этого уравнения будут иметь вид (1-6t; 1-7t), где$t \in Z$

Ответ: (1-6t;1-7t), где $t \in Z$

№ 23

Решите в целых числах уравнение 19x+98y=1998

Решение: очевидно, что x=100, y=1 является решением данного уравнения. Тогда все решения этого уравнения будут иметь вид (100+98t;1-19t),где $t \in Z$ (19 и 98 -взаимно простые числа)

Ответ: (100+98t;1-19t), где $t \in Z$

№ 24

Найдите наименьшее трехзначное число, которое при делении на 11 дает остаток 7, а при делении на 13 – остаток 11.

Решение: Число n делится на 11 с остатком 7, если n=11a+7

Аналогично для деления на 13 с остатком 11: n=13b+11

n является трехзначным при $a \geq 7$, $b \geq 9$.

В первом случае n может быть равно: 102, 115,128…во втором: 106, 117, 128…

Получаем наименьшее трехзначное число, удовлетворяющее условиям задачи 128.

Ответ: 128.

№ 25

Решите в целых числах уравнение x+y=xy

Решение: Преобразуем уравнение:

x= xy-y

x= y(x-1)

$$y = \frac{x}{x-1}$$

x и x-1 – два последовательных числа, при делении которых получается целое число y. Это возможно только в случае x=2, x=0, в остальных случаях деления числа на предыдущее получится дробное число, то есть других решений нет.

Для x=2 : y= $\frac{2}{1} = 2$

Для x=0 : y= $\frac{0}{-1} = 0$

Ответ: (0;0) или (2;2).

№ 26

Решите в целых числах уравнение $(x+3)^2 + (2y+1)^2 = 5$

Решение: $(x+3)^2 + (2y+1)^2 = 5$ равносильно совокупности систем

$\begin{cases} (x + 3)^2 = 4 \\ (2y + 1)^2 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} (x + 3)^2 = 1 \\ (2y + 1)^2 = 4 \end{cases}$; откуда из первой системы:

$\begin{cases} x + 3 = 2 \\ 2y + 1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 3 = 2 \\ 2y + 1 = -1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 3 = -2 \\ 2y + 1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 3 = -2 \\ 2y + 1 = -1 \end{cases}$

Т.е. x= – 1 или x= – 5, а y=0 или y= –1

Из второй системы:

$\begin{cases} x + 3 = 1 \\ 2y + 1 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 3 = 1 \\ 2y + 1 = -2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 3 = -1 \\ 2y + 1 = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x + 3 = -1 \\ 2y + 1 = -2 \end{cases}$, но у этих систем нет решений в целых числах для y.

Ответ: (–1;0) ; (–1; –1), (–5;0), (–5; –1)

§8. Простые числа.

Натуральные числа, отличные о единицы, подразделяют на простые и составные. Простыми называется такое натуральное число, натуральными делителями которого являются лишь само число и единица. Остальные натуральные числа называются составными.

Примеры простых чисел: 2, 3, 5, 37, 89. Числа же 4, 6, 49, 93, 96 – составные. Число 1 не относится ни к простым числам, ни к составным.

Всякое составное число можно представить в виде произведения двух меньших натуральных чисел. Простое же число нельзя разложить на меньшие множители.

Любое натуральное число можно разложить на простые множители. Действительно, составное число можно разложить на два меньших множителя, не равных 1. Если какой-нибудь из множителей не прост, то снова разложим его на два множителя, отличных от 1, и, так далее. В конце концов, мы придем к разложению данного числа на простые множители.

«Основная теорема арифметики» утверждает, что любые два разложения данного натурального числа на простые множители одинаковы, если не обращать внимания на порядок следования сомножителей.

Прежде, чем доказывать теорему, отметим несколько свойств простых чисел.

1. Два различных простых числа взаимно просты.

2. Число a взаимно просто с простым числом p в том и только в том случае, если a не делится на p.

3. Если произведение нескольких чисел делится на простое число, то по крайней мере один из сомножителей делится на это простое число (см. §6, утверждения 2,3 и задачу 1).

4. Если a делится на p, и a делится на q, причем p и q – различные простые числа, то a делится на pq (см. §6, утверждения 4).

Перейдем теперь к доказательству основной теоремы арифметики. Пусть $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot ps$, $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_1$ – два разложения числа n на простые множители. Из равенства

$p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot ps = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_1$ следует, что произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot ps$ делится на q_1. Пусть p_i делится на q_1. Так как p_i – простое, то $p_1=q_1$. Разделив обе части равенства $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot ps = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_1$ на q_1 (равное p_i), мы придем к равенству с меньшим на единицу числом сомножителей в левой и правой части. Повторив то же рассуждение с q_2, мы еще раз уменьшим число сомножителей в каждой части равенства. Будем продолжать так до тех пор, пока в одной из частей равенства не получим число 1. Но тогда и в другой части должно стоять число 1, а значит, s=t и числа $p_1, p_2, \ldots, ps$ получаются из чисел $q_1, q_2, \ldots, q_1$ перестановкой.

При разложении числа на простые множители могут встретиться одинаковые сомножители. Пусть натуральное число n раскладывается на a_1 простых чисел, равных p_1, a_2 простых чисел, равных p_2, и так далее и, наконец, a_k простых чисел, равных p_k. В этом случае число n можно записать в виде $n= p^{a1}{}_1 \cdot p^{a2}{}_2 \cdot \ldots \cdot p^{ak}{}_k$.

Такое представление числа называют каноническим.

Примеры: $16=2^4$, $224=2^5 \cdot 7$, $210=2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1000=2^3 \cdot 5^3$.

Простых чисел, так же, как и составных, бесконечно много. Известно много доказательств этого утверждения. Вот одно из них. Будем рассуждать от противного. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – все простые числа. Рассмотрим число $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k+1$. Так как N отлично от чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то N – составное число. Значит, N делится на какое-нибудь простое, то есть на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что простых чисел бесконечно много.

Чуть видоизменив приведенное выше рассуждение, можно получить доказательство бесконечности простых чисел вида 4n-1.

Действительно, пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – все простые числа вида 4n-1. Рассмотрим число $N=4\, p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k-1$. Так как N отлично от чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, то N – составное число. Значит, N делится на какое-нибудь простое. Так как N – число вида 4n-1, то какой-нибудь его простой делитель должен иметь вид 4n-1 (так как произведение чисел вида 4n+1 есть число вида 4n+1, см. §2). Таким образом, N должно делиться на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что простых чисел вида 4n-1 бесконечно много.

Немного труднее доказать, что простых чисел вида 4n+1 бесконечно много. В 1837 г. немецкий математик Дирихле доказал, что в любой арифметической прогрессии, первый член и разность которой взаимно просты, есть бесконечно много простых чисел.

О простых числах более сложного вида известно мало. Так, например, неизвестно, конечно или бесконечно множество простых чисел вида n^2+1. Неизвестно также, конечно или бесконечно множество простых чисел вида 2^n-1 (их называют простыми числами Мерсенна) и множество простых чисел вида 2^n+1 (такие простые числа называют числами Ферма).

Вопрос о том, как часто простые числа встречаются в натуральном ряду и как они распределены среди натуральных чисел, оказался очень сложным. Есть простые числа, которые находятся совсем близко друг от друга, как, например, 2 и 3, 3 и 5, 191 и 193, 2711 и 2713. Такие пары чисел называются близнецами. До сих пор неизвестно, конечно или бесконечно количество пар близнецов. Но есть и сколь угодно длинные участки натурального ряда, в которых нет ни одного простого числа. Например, среди последовательных чисел $k!+2, k!+3,\ldots,k!+k$ нет ни одного простого. В 1852 г. П.Л. Чебышев доказал предположение французского математика Ж. Бертрана о том, что для любого натурального числа n между числами n и $2n$ всегда есть простое число.

ЗАМЕЧАНИЕ. Основная теорема арифметики кажется очевидной. Однако, хотя речь идет о мультипликативных свойствах (свойствах делимости) целых чисел, основную теорему невозможно доказать, не используя одновременно операций умножения и сложения в **Z** (множестве целых чисел). В качестве иллюстрации этого утверждения рассмотрим в **N** (множестве натуральных чисел) подмножество $\mathbf{M}=\ 4k+1;\ k=0,1,2,\ldots$. Оно замкнуто относительно умножения: $(4k_1+1)(4k_2+1)=16k_1k_2+4k_1+4k_2+1=4k_3+1$. Нетрудно установить существование разложения (первая часть основной теоремы) $n=q_1q_2\cdot\ldots\cdot q_i$ – далее неразложимые элементы из **M**. Мы назовем их квазипростыми. Выпишем несколько таких чисел: 5, 9, 13, 17, 21, 49. Вторая часть основной теоремы для системы **M** не верна, поскольку, например, число $441 \in M$ имеет два существенно разных разложения в произведение квазипростых чисел: $441=9\cdot49=21^2$.

Задачи.

1. Найдите все такие простые числа p, что число $2p^2+1$ также является простым.

Решение. Если p=3, то $2p^2+1=19$ и, значит, p=3 нам годится. Если $p\neq 3$, то p имеет вид $p=3k\pm 1$, откуда $2p^2+1= 2(9k^2\pm 6k+1)+1 = 3(6k^2\pm 4k+1)$. Значит, $2p^2+1$ делится на 3, а так как, кроме того, $2p^2+1 >3$, то p – не простое.

2. Докажите, что произведение всех простых чисел, не превосходящих n(n>2), больше n.

Решение. Пусть p – наибольшее простое число, не превосходящее n. Рассмотрим разложение числа $N=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p-1$ на простые множители. Это разложение не может содержать ни одного из простых чисел 2,3,5,…,p. Значит, все простые делители числа N больше p. Таким образом, и само число N больше p, откуда $2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p > n$.

Задачи § 8

№ 27

Напишите каноническое разложение для числа 999.

Решение: Разложим 999 на простые множители

999	3
333	3
111	3
37	37
1	

Следовательно: $999= 3^3\cdot 37$

Ответ: $999= 3^3\cdot 37$

№ 28

Напишите каноническое разложение для числа 111111

Решение: Разложим 111111 на простые множители

111111	3
37037	37
1001	7
143	11
13	13
1	

Следовательно: 111111=3·7·11·13·37

Ответ: 111111=3·7·11·13·37

№ 29

Докажите, что квадрат любого простого числа, больше 3, при делении на 24 дает в остатке 1.

Доказательство: Чтобы доказать, что n^2 при делении на 24 дает остаток 1, нужно доказать, что выражение $n^2 – 1$ делится на 24 нацело, если простое число больше 3.

Доказательство: $n^2-1 = (n-1)\cdot(n+1)$, так как n простое и больше 3, то оно нечетное. Тогда числа (n-1) и (n+1) два последовательных четных числа и они как минимум делятся на 2 и 4, а все произведение делятся 2·4 =8.

$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$, есть произведение 3 последовательных чисел, значит, одно из них делится на 3, но n - простое, больше 3 и оно не может делиться на 3, значит на 3 делится или (n-1) или (n+1), тогда $n^2 -1=(n-1)(n+1)$ делится на 2x4x3=24. Ч.т.д.

№ 30

Пусть p, q – простые числа больше 3. Докажите, что число $p^2–q^2$ делится на 24.

Доказательство: Т.к всякое простое число имеет вид 6n±1, представим p=6n±1, q=6m±1.

Тогда: $p^2-q^2=(p-q)(p+q)=(6n\pm1-6m\pm1)\cdot(6n\pm1+6m\pm1)=6(n+m)\cdot2\cdot(3n+3m\pm1)=$ $12(n-m)(3n+3m\pm1)$. Это число делится на 12. Кроме того: Если n-m чётно , то p^2-q^2 делится на 24. Если n-m нечетно ,значит , числа m и n разной чётности , тогда 3m+3n тоже нечётно , а тогда 3n+3m±1 – чётно, то есть $p^2–q^2$ делится на 12·2=24. Ч.т.д.

№ 31

Найдите все такие простые числа p, что числа p+2 , p+4 также являются простыми.

Решение: p>2, т.к. если p=2, то p+2=4 – не простое. Числа p , p+2 и p+4=p+3+1 дают разные остатки при делении на 3 , значит, одно из них делится на 3. Если p делится на 3, то p=3 , p+2=5 , p+4=7. Если p не делится на 3 , то на p+2 или p+4 делятся на 3 , а значит , не могут быть простыми. Т.е единственное решение p=3.

Ответ: p=3.

§9. Сравнения.

Два числа, разность которых кратна натуральному числу m, называются **сравнимыми по модулю m.** (Слово *модуль* – от латинского *modulus* – означает *мера*, *величина*). Утверждене «а сравнимо с b по модулю m» обычно записывают в виде $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ или короче: $a \equiv b(m)$. Вот примеры сравнений: $5 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 2)$, $48 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 6)$, $-16 \equiv 9(\mathrm{mod}\, 5)$. Запись $a \neq b(\mathrm{mod}\, m)$ означает, что числа а и b не сравнимы по модулю *m*, то есть разность a-b не кратна *m*. Так, например, $17 \neq 6(\mathrm{mod}\, 4)$. $-10 \neq 5(\mathrm{mod}\, 7)$.

Сравнение по модулю 1выполняется для любых двух целых чисел, так как всякое число кратно 1. Два числа сравнимы по модулю 2, если они одной четности, то есть либо оба четны, либо оба нечетны.

Сам термин «сравнение» и обозначение $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ введены К.Ф. Гауссом в его знаменитой книге «Арифметические исследования», появившейся в 1801 году. До него французский математик Лежандр для обозначения сравнений пользовался обычным знаком равенства.

Поскольку сравнение по модулю *m* есть не что иное, как «равенство с точностью до кратных *m*», то многие свойства сравнений напоминают свойства равенств. Так, например, $a \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$; если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, то $b \equiv a(\mathrm{mod}\, m)$; если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ и $b \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$, то $a \equiv c(\mathrm{mod}\, m)$.

Кроме того, два сравнения по одинаковому модулю можно складывать, вычитать, перемножать так же, как и равенства: если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ и $ac \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$, то $a+c \equiv b+d(\mathrm{mod}\, m)$, $a\text{-}c \equiv b\text{-}d(\mathrm{mod}\, m)$, $a\cdot c \equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\, m)$.

Действительно, если $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$, и $c \equiv d(\mathrm{mod}\, m)$, то числа a-b и c-d кратны m, то есть a-b=mk, c-d=ml при некоторых целых k и l. Тогда a=b+mk, c=d+ml, и, складывая эти равенства, получаем a+c=b+d+m(k+l). Значит,разность (a+c)-(b+d) кратна m, что означает $a+c\equiv b\text{-}d(\mathrm{mod}\, m)$. Аналогично доказывается, что $a\text{-}c\equiv b\text{-}d(\mathrm{mod}\, m)$ и $a\cdot c\equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\, m)$.

Так как сравнения по одинаковому модулю можно перемножать, то, перемножив сравнения $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$ и $c \equiv c\ (\mathrm{mod}\, m)$, мы получим сравнение $a\cdot c\equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\, m)$.Таким образом, мы видим, что обе части сравнения можно умножать на одно и то же целое число. Кроме того, перемножая несколько одинаковых сравнений, видим, что обе части сравнения можно возводить в одну и ту же натуральную степень.

Аналогичные свойства справедливы и для равенств. Но, в то время как обе части равенства можно сокращать на множитель, отличный от нуля, для сравнений аналогичное свойство места не имеет. Например, $25\equiv 10(\mathrm{mod}\, 5)$, но $5 \neq 2(\mathrm{mod}\, 5)$. Все же в целом ряде случаев сокращать обе части сравнения на общий множитель можно, а именно если $a\cdot c\equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\, m)$ и числа c и m взаимно просты, то $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$. Действительно, сравнение $a\cdot c\equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\, m)$ означает, что разнсть ac-bc=(a-b)c делится на m. Так как числа c и m взаимно просты, то a-b делится на m и, значит, $a \equiv b(\mathrm{mod}\, m)$.

Если модуль сравнения – простое число p, то из того, что $a\cdot c\equiv b\cdot d(\mathrm{mod}\, p)$, $c\neq 0(\mathrm{mod}\, p)$, вытекает $a \equiv b(\mathrm{mod}\, p)$. Так что в случае простого модуля имеется полная анология с соответствующим свойством равенств.

Известно, что если произведение двух чисел равно нулю, то нулю равен хотя бы один из сомножителей. Аналогичное свойство для сравнений в общем случае не выполняется: $2\cdot3\equiv 0(\text{mod}6)$, но $2 \neq 0(\text{mod}6)$, $3 \neq 0(\text{mod}6)$. Однако если $a\cdot b\equiv 0(\text{mod}m)$ и числа a и m взаимно просты, то $b\equiv0(\text{mod}m)$. Это свойство просто является переформулировкой известного нам свойства делимости: если ab делится на m,a и m взаимно просты, то b делится на m. В частном случае, когда модуль сравнения – простое число, из того, что произведение двух чисел сравнимо с нулем, следует, что хотя бы один из сомножителей сравним с нулем. (Подумайте, переформулировкой какого известного вам свойство простых чисел это является.) Таким образом, в случае простого модуля опять имеется полная аналогия с равенствами.

Сравнениями очень удобно пользоваться в тех случаях, когда в каких-либо исследованиях достаточно знать числа с точностью до кратных некоторого числа. Например, если нас интересует, на какую цифру оканчивается куб целого числа a, то нам достаточно знать лишь последнюю цифру числа a, то есть знать a с точностью до кратных числа 10, и можно использовать сравнения по модулю 10.

Отметим, что два числа a и b сравнимы по модулю m в том и только том случае, если они дают одинаковые остатки при делении на m. Действительно, пусть r_1 и r_2 – остатки от деления чисел a и b на m. Тогда $a \equiv mq_1+r_1$, $b=mq_2+r_2$ при некоторых q_1, q_2, причем $0 \leq r_1,r_2< m$. Отсюда полчаем $a-b=m(q_1-q_2)+(r_1-r_2)$. Таким образом, a-b делится на m в том и только в том случае, если r_1-r_2 делится на m, что в силу неравенств $0 \leq r_1,r_2<m$ выполняется, если $r_1= r_2$.

Одним из простейших применений сравнений является вывод признаков делимости. Покажем это на примере признака делимости на 11. Так как $10 \equiv -1 (\text{mod}11)$, то $10^2 \equiv 1 (\text{mod}11)$, $10^3 \equiv -1 (\text{mod}11)$, $10^4 \equiv 1 (\text{mod}11)$ и так далее. Поэтому $n=a+10b+100c+\ldots\equiv a-b+c -\ldots (\text{mod}11)$. Значит, числа n и $a-b+c-\ldots$ дают одинаковые остатки при делении на 11. В частности, n делится на 11 в том и только в том случае, если на 11 делится число $a-b+c-\ldots$ (см. §3).

Приведем теперь в качестве примера несколько задач с решениями, использующими сравнения.

1. Найти остаток от деления 18765^{924} на 11.

Решение. Так как $18765 \equiv 5-6+7-8+1 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 11)$ (см. вывод признака делимости на 11), то, возведя обе части сравнения в степень 924, получим $18765^{924} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 11)$. Значит, искомый остаток равен 1.

2. Найти все натуральные числа n, такие что число $n \cdot 2^n+1$ кратно 3.

Решение. Так как $2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, то $n \cdot 2^n+1 \equiv n \cdot (-1)^n+1 (\mathrm{mod}\, 3)$. Естественно рассмотреть два случая: n четно, n нечетно. В первом случае $n=2k$, где k – некотрое целое, $n \cdot (-1)^n+1=2k+1$. Нам нужно, чтобы $2k+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, то есть $2k \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$, откуда в силу $2 \equiv -1 (\mathrm{mod}\, 3)$ получаем $k \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 3)$.Значит, $k=3l+1$ при некоторым целом l, откуда $n=2k=6l+2$. Если n нечетно, то $n=2k+1$ при целом k, $n \cdot (-1)^n+1=-2k$. Нам нужно, чтобы $-2k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, откуда $k \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$, то есть $k=3l$ при некотором целом l. Тогда $n=2k+1=6l+1$. Итак, $n \cdot 2^n+1$ кратно 3, если n при делении на 6 дает в остатке 1 или 2.

3. Доказать, что при нечетном n число $n^{n+2}+(n+2)^n$ делится на $2n+2$.

Решение. По условию $n=2k-1$ при некотором целом k. Тогда $2n+2=4k$. Возведем обе части очевидного сравнения $2k-1 \equiv -(2k+1) (\mathrm{mod}\, 4k)$ в степень $2k-1$; получим $(2k-1)^{2k-1} \equiv -(2k+1)^{2k-1} (\mathrm{mod}\, 4k)$. Так как при любом k справедливо $(2k-1)^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4k)$, то $(2k-1)^{2k+1}=(2k-1)^{2k-1}(2k-1)^2 \equiv -(2k+1)^{2k-1} (\mathrm{mod}\, 4k)$, или $(2k-1)^{2k+1}+(2k+1)^{2k-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4k)$, то есть $n^{n+2}+(n+2)^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2n+2)$.

Еще одно применение сравнений продемонстрируем на доказательстве следующей важной теоремы.

ТЕОРЕМА ФЕРМА. Пусть p – простое число. Тогда для любого целого числа a справедливо сравнение $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$. Если $a \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, то $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Доказательство. Сразу же заметим, что если $a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, то сравнение $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$ справедливо, а при $a \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ сравнение $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$ равносильно сравнению $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Итак, пусть $a \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$. Обозначим $r_1, r_2, \ldots, r_{p-1}$ остатки от деления чисел $a, 2a, \ldots, (p-1)a$ на p. Тогда $a \equiv r_1 (\mathrm{mod}\, p)$, $2a \equiv r_2 (\mathrm{mod}\, p), \ldots, (p-1)a \equiv r_{p-1} (\mathrm{mod}\, p)$.

Перемножив эти сравнения, получим

$a\cdot 2a\cdot\ldots\cdot(p-1)a\equiv r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{p-1}(\mathrm{mod}\,p)$, или

$a^{p-1}(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)) \equiv r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{p-1}(\mathrm{mod}\,p)$.

Заметим теперь, что среди чисел $r_1, r_2,\ldots,r_{p-1}$ нет равных. Действительно, если, например, $r_k=r_1$, то $ka\equiv la(\mathrm{mod}\,p)$ и, сократив на a, получим $k\equiv l(\mathrm{mod}\,p)$, то есть $k=l$. Таким образом, числа $r_1, r_2,\ldots,r_{p-1}$ – это просто числа $1,2,\ldots,p-1$, только, возможно, расположенные в другом порядке. Поэтому $r_1\cdot r_2\cdot\ldots\cdot r_{p-1}=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)$ и, значит, $a^{p-1}(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1))\equiv 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(p-1)\ (\mathrm{mod}\,p)$, и $a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

Приведем примеры применения теоремы Ферма.

1. Найти остаток от деления 2^{1998} на 13.

Решение. По теореме Ферма $2^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,13)$. Разделим 1998 на 12 с остатком: $1998=12\cdot 166+6$. Откуда получаем $2^{1998}=2^{12\cdot 166+6}=(2^{12})^{166}\cdot 2^6\equiv 2^6=12(\mathrm{mod}\,13)$. Итак, $2^{1998}\equiv 12(\mathrm{mod}\,13)$, а это значит, что остаток от деления 2^{1998} на 13 равен 12.

2. Доказать, что если p – простое число вида $4k+3$, то при любом n число n^2+1 не делится на p. Другими словами, при любом n все делители числа n^2+1 имеют вид $4k+1$.

Решение. Рассуждаем от противного. Пусть p имеет вид $4k+3$ и $n^2+1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$, то есть $n^2\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$. Возведя обе части последнего сравнения в степень $\frac{p-1}{2}$, получим $n^{p-1}\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\,p)$. По теореме Ферма (так как $n\not\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$) имеем $n^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$. С другой стороны, $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{2k+1}=-1$. Противоречие.

Задачи § 9

№ 32

Найдите остаток от деления: 273273 на 7.

Решение: $273:7=39$ делится нацело $\Rightarrow 273273\equiv 0(\mathrm{mod}\ 7)$

Ответ: 0

№ 33

Найдите остаток от деления: 159^{951} на 13

Решение: 159 при делении на 13 дает остаток 3 $\Rightarrow$ $159 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 13)$

$159^{951} \equiv 3^{951} (\mathrm{mod}\ 13)$

$3^{951} = (3^3)^{317} = 27^{317}$

27:13=2(ост.1)

$27 \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 13)$

$27^{317} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 13)$ $\Rightarrow$остаток 1

Ответ: 1

№ 34

Найдите остаток от деления: 12321^{32123} на 17

Решение: 12321:17=724(ост. 13), значит

$12321 \equiv 13 (\mathrm{mod} 17) \Rightarrow 12321^{32123} \equiv 13^{32123} (\mathrm{mod}\ 17)$

По теореме Ферма $13^{16} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 17)$

32123:16=2007 (остаток 11), тогда

$13^{32123} = 13^{16 \cdot 2007+11} = (13^{16})^{2007} \cdot 13^{11} \equiv 1^{2007} \cdot 13^{11} (\mathrm{mod} 17) = 13^{11} (\mathrm{mod}\ 17)$

$13^{11} = 13^{10} \cdot 13 = (13^2)^5 \cdot 13 = 169^5 \cdot 13$

$169 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 17)$

$169^5 \equiv -1 (\mathrm{mod}\ 17)$

$13 \equiv 13 (\mathrm{mod}\ 17)$

Следовательно: $-1 \cdot 13 = -13 \equiv 4 (\mathrm{mod} 17) \Rightarrow$остаток от деления 1232132123на 17 равен 4

Ответ: 4

№ 35

Найдите остаток от деления: $7^{99} + 11^{99}$ на 19

Решение: $7^{99} + 11^{99} \equiv 7 + 11 = 18 (\mathrm{mod}\ 19)$

Ответ:18

3. ИГРЫ

Предположим, что надо принять решение в условии, когда нашим целям противостоят противоположные другой стороны, когда цели нашей воле противостоит другая воля, подобные ситуации встречают это - конфликтные ситуации.

Шахматист, принимая то или иное решение, старается учесть возможные действия противника. Решение о той или иной военной операции должно приниматься с учетом ответных действий противной стороны. Принимая решение об установлении цены товара, продавец на установлении цены рынке учитывает возможную реакцию покупателя на эту цену, и т.д.

Во всех подобных случаях происходит столкновение противоположных интересов: принятие решения каждой из сторон связано с преодолением конфликта.

Принятие решения в конфликтной ситуации затрудняется из-за неопределенности поведения противника. Мы не можем точно предсказать действия противника, так же как и он не может точно предсказать наши действия. Однако как вам, так и ему приходится принимать вполне определенные решения.

Необходимость обоснования оптимальных решений, в тех или иных конфликтных ситуациях, привела к возникновению теории специального направления в современной математике игр. Под термином «игра» здесь понимается упрощенная математическая модель рассматриваемой конфликтной ситуации. В отличие от реального конфликта игра ведется по определенным правилам, которые четко определяют права и обязанности участников игры, а также исход игры выигрыш и проигрыш каждого участника).

Задолго до появления теории игр широко использовались подобные упрощенные модели конфликтов - игры в буквальном смысле слова: шахматы, шашки, домино, карточные игры и т.д. Именно отсюда и происходят как название самой теории, так и различные термины, используемые в ней (конфликтные стороны называют «игроками» и т.д.).

Задача теории игр — определить такую стратегию игрока, при которой его шансы на выигрыш оказались бы наибольшими. В основе поиска оптимальных стратегий лежит следующее основное положение. Считается, что противник также разумен и активен, как и сам игрок, и предпринимает все меры для того, чтобы достичь успеха.

В предлагаемом задании вы познакомитесь с наиболее простыми «моделями — играми».

Мы рассмотрим такие игры, в которых ничьи отсутствуют и для которых теория позволяет установить, какая из сторон выигрывает при условии правильной игры. Одновременно теория подскажет, как играть правильно. При этом победа достигается независимо от того, как играет другая сторона. Мы познакомимся с двумя методами поиска выигрышной тактики для одной из сторон (выигрышной стратегии): «поиск симметрии» и «анализ с конца». Поясним оба этих метода на примерах.

Задача 1. В коробке лежит 21 спичка. Двое по очереди вынимают из нее 1, 2, 3 или 4 спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выигрывает при правильной игре, и как он для этого должен играть?

Обсуждение. Начнем рассуждать «с конца». Игрок, делающий ход, когда в коробке осталось 1,2, 3 или 4 спички, очевидно выигрывает. Но если в коробке осталось 5 спичек, делающий ход обязательно проигрывает, так как после любого его хода останется либо 1, либо 2, либо 3, либо 4 спички, и его партнер заберет их.

Таким образом, тот кто оставит партнеру 5 спичек, обеспечивает себе проигрыш. Этого, очевидно, может добиться тот игрок, после хода которого осталось 10 спичек. Для этого он должен взять 5-k спичек, где k — количество спичек, которое возьмет его партнер (тогда в коробке остается 5 спичек). Рассуждая аналогично, получим, что выигрывает тот, у кого после хода которого в коробке остается 15 спичек или 20.

Следовательно, в этой игре выигрывает начинающий игрок. Первым ходом он должен взять одну спичку (в коробке останется 20 спичек). Каждым следующим своим ходом он берет 5-k спичек, где k — количество спичек, взятых вторым игроком.

Отметим два следующих момента:

1. У начинающего игрока при указанной стратегии всегда есть ход (так как 5-k> 0 при k= 1, 2, 3, 4).

2. Так как после каждого хода количество спичек в коробке уменьшается, то наступит момент, когда начинающий заберет последнюю спичку и выиграет.

Задача 2. Имеется две кучки конфет. В первой 7 конфет, во второй 5. За один ход разрешается взять любое количество конфет, но из одной кучки. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто выигрывает при правильной игре начинающий или его партнер? И как для этого ему надо играть?

Решение. При правильной игре выигрывает начинающий игрок.

Его стратегия: первым ходом он должен сравнять количество конфет в кучках, т.е. взять из первой кучки 2 конфеты. Каждый следующий его ход должен быть «симметричен» ходу второго игрока, т.е. если «второй» берет n конфет из одной кучки, то «первый» должен взять также n конфет, но из другой кучки. Таким образом, если может сделать ход «второй» игрок, то может сделать ход и «первый»: Так как после каждого хода количество конфет уменьшается, то наступит момент, когда «второй» не сможет сделать ход (ни в одной из кучек конфет не останется) и проиграет.

Задача 3. Два игрока кладут по очереди пятаки на круглый стол так, чтобы они не накладывались друг на друга. Проигрывает тот, кто не сможет положить пятака. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен для этого играть?

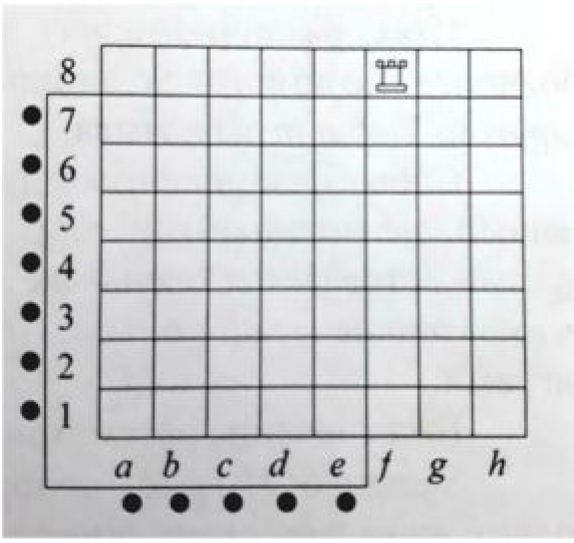
Решение. При правильной игре выигрывает начинающий. Его стратегия: первым ходом он кладет пятак в центр стола. Каждым следующим своим ходом он кладет пятак симметрично пятаку, положенному вторым игроком относительно центра стола. Таким образом, если сможет сделать ход «второй» игрок, то может сделать ход и «первый». Так как после каждого хода«свободная» поверхность стола уменьшается, то наступит момент когда второй не сможет сделать ход и проиграет.

Итак, можно выделить следующие этапы описания выигрышной стратегии:

1. Указание первого хода (если выигрывает начинающий).
2. Указание ответного хода на любой ход противника.
3. Пояснение возможности указанного ответного хода.
4. Пояснение неизбежности проигрыша противника.

Теперь рассмотрим такую игру.

Задача 4. На поле f8 шахматной доски стоит ладья. Играют двое, ходят по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ладью либо на одну или несколько клеток вниз по вертикали, либо на одну или несколько клеток влево по горизонтали. Проигрывает тот, кому некуда ходить (а выигрывает, следовательно, тот, кто загонит ладью в левый нижний угол—на поле a1). Как играть, чтобы выиграть? Кто победит начинающий или его партнер?



Обсуждение. Начнем опять «с конца». Если ладья стоит на поле a1, то тот, чья очередь ходить, уже проиграл. Поэтому отметим это поле знаком, «минус». Если ладья стоит на поле, с которого одним ходом можно попасть на a1, то начинающий пойдет на a1 и выиграет. Поэтому отметим поля, с которых можно за один ход попасть на a1, знаком «плюс» (это поля a2, a3, ..., a8 и b1, c1..., h1).

Пусть теперь ладья стоит, на поле b2. Начинающий, конечно, проиграет: при любом своем ходе он попадет на «плюс», после него противник ставит ладью на a1. Поэтому b1 отметим «минусом». Но если ладья стоит на одной вертикали с b2, но выше, то начинающий выиграет после хода на b2, поэтому поля b3, b4,..., b8 отметим плюсами. По той же причине поставим плюсы на поля c2; d2,'... , h2, потому что игрок, который начинает с одного из этих полей, при правильной игре обязательно победит.

Сформулируем правила расстановки плюсов и минусов:

1. Если с поля некуда пойти, ставим минус.

2. Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле, отмеченное минусом, ставим плюс.

3. Если все ходы ведут на поля, отмеченные плюсами, ставим минус.

Докажем теперь, что если мы отметим все поля шахматной доски в соответствии с указанными правилами, то выигрывает начинающий, если ладья стоит на поле, отмеченном знаком
«плюс» (в противном случае он проигрывает), если он будет пользоваться стратегией, которую можно выразить тремя словами: ставь на минус.

Действительно. По правилу 2 первый ход можно сделать на минус. Тогда по правилу 3 противник вынужден будет пойти на плюс. А начинающий — снова на минус, противник — опять на плюс... Так будет продолжаться, пока ладья не попадет на поле, с которого никуда пойти нельзя — на a1. Попадет она туда как раз после хода начинающего, который тем самым выиграет. Заметим, что в этом доказательстве использован тот факт, что каждый ход приближает ладью к «тупиковому» положению (после каждого хода сумма координат поля, на котором сказывается ладья, уменьшается).

Итак, в нашей задаче выигрывает начинающий. Первым ходом он должен пойти на поле f6, а каждым следующим своим ходом возвращаться на диагональ.

Вернемся к задаче 2.

Каждому положению ладьи на доске сопоставим две кучки конфет: в первой — столько конфет, сколько горизонталей находится под ладьей, а во второй —сколько вертикалей слева от ладьи. Тогда, обратно, каждый набор конфет в двух кучках определяет положение ладьи на доске. Мы установили соответствие между позициями в двух играх: Каждому распределению конфет по кучкам соответствует поле шахматной доски, и, наоборот, каждому полю доски соответствует пара кучек конфет. Теперь легко установить соответствие и между возможными ходами. Если берется несколько конфет из первой кучки, то ладья сдвигается на столько же полей вниз, если из второй — ладья сдвигается на столько же полей влево.

Начальная позиция (7 конфет в первой кучке, 5 — во второй) соответствует положению ладьи на f8. Начинающий выиграет, если он первым ходом пойдет на f6.. На «языке конфет»: если он возьмет две конфеты из первой кучки.

Если сначала в обеих кучках было по 7 конфет, то начинающий, при разумной игре противника, проиграет.

Итак, различие между играми, описанными в задачах 2 и 4, чисто внешнее: позиции и ходы одной игры соответствуют позициям и ходам другой. Такие игры называют «изоморфными».

Слово «изоморфизм» произошло от греческих слов «изос» (постоянный, неизменный) и «морфэ» (форма). В математике слово «изоморфизм» встречается очень часто — его употребляют, когда нужно отметить, что различие между объектами чисто внешнее, как между нашими двумя играми.

Задачи раздела «Игры»

№ 1

На одном из полей клетчатой бумаги длиной n стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Проигрывает тот, кому некуда ходить. При каких положениях фишки побеждает начинающий, а при каких его партнер, если ход состоит в перемещении фишки влево на 1 или 3 клетки?

Решение:

-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19					n

Пронумеруем клетки слева направо числами от 0 до n. В каждую клетку поставим минус, если клетка проигрышная (клетка 0 – с нее некуда ходить) или плюс, если с них за один ход можно попасть в клетку 0 или другую проигрышную клетку (например, клетки 1 и 3). Получим чередование проигрышных (четных) и выигрышных (нечетных) клеток. Т.о., все зависит от четности клетки, на которой стоит фишка. Если фишка стоит на нечетном номере, то начинающий сможет ставить каждый раз фишку на клетку с четным номером, и он выиграет. Если фишка стоит на четном поле, то стратегией «ставь на четное» сможет воспользоваться второй игрок, и начинающий проиграет.

№ 2

На одном из полей клетчатой бумаги длиной n стоит фишка. Играют двое, ходят по очереди. Проигрывает тот, кому некуда ходить. При каких положениях фишки побеждает начинающий, а при каких его партнер, если ход состоит в перемещении фишки влево на 2 или 4 клетки?

Решение:

-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	+	+
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19					n

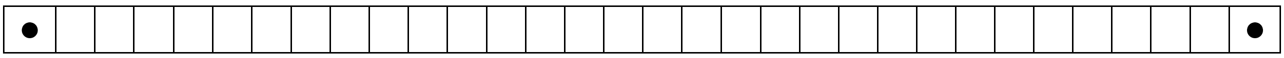
Пронумеруем клетки слева направо числами от 1 до n. В каждую клетку поставим минус, если клетка проигрышная (клетки 1 и 2 – с них некуда ходить) или плюс, если с них за один ход можно попасть в проигрышную клетку (например, клетки 3, 4, 5, 6). Клетки 7 и 8 проигрышные для того, кто с них ходит, т.к. с них можно попасть только на выигрышные клетки 3,4,5,6. Клетки 9,10,11,112 снова выигрышные и т.д. Получаем периодическую последовательность из 6 знаков --++++, т.е. проигрышные позиции 6n+1 и 6n+2

1-й выигрывает если фишка не стоит на позиции 6n+1; 6n+2, первым ходом он ставит ее на ближайшую клетку вида 6n+1 или 6n+2, а потом дополняет каждый ход противника до 6, чтобы снова попадать на клетки такого вида.
2-й выигрывает если фишка стоит на позиции 6n+1; 6n+2, пользуясь то же стратегией.

№ 3

В концах полоски клетчатой бумаги 30 стоят шашки. Играют двое, ходят по очереди. За ход разрешается сдвигать свою шашку на одну или две клетки в направлении шашки соперника («перепрыгивать» через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Решение:



Выиграет тот, после чьего хода останется три свободные клетки между шашками, т.к. противник делает хо (1 или 2 клетки), игрок делает ход (2 или 1 клетка) и шашки стоят вплотную, ходить больше некуда. Также выигрышными являются расстояния с кратным 3 количеством клеток. Поэтому выигрывать всегда будет 2-й, при этом ему нужно ход первого игрока всегда дополнять до 3 (2+1 или 1+2), пока 1-й не сможет сделать ход.

№ 4

В кучке лежат 25 камней. Двое по очереди берут из нее 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто берет последний камень.

Решение: проигрывает тот, кто предпоследним ходом оставит 4 или менее камней, т.к. противник берет 1, 2 или 3 камня, оставляя 1 один – для проигравшего. Значит, выиграет второй игрок, если будет пользоваться стратегией «брать 4-n камней», где n камней взял первый игрок. Тогда за каждый ход обоих игроков будет из кучки забираться 4 камня, за 6 ходов будет собрано 24 камня и останется 1 камень, который заберет начинающий игрок.

Ответ: начинающий игрок проигрывает.

№ 5

На самом левом поле клетчатой полосы 1*1986 лежат три пуговицы. Двое по очереди переносят любую пуговицу вправо на любое количество полей. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

Решение: начинающий выигрывает. Первым ходом он переносит 1 пуговицу в конец полосы т.о. выбывает из игры и дальше игра ведется 2 пуговицами. Дальше ходит второй игрок одной пуговицей. Тогда, пока есть куда ходить противнику, может сделать ход и начинающий игру, и когда противник доводит свою пуговицу до конца, начинающий игрок тоже доводит до конца свою пуговицу и противник не может сделать ход.

Ответ: начинающий игрок выигрывает.

№ 6

На окружности расставлено 88 точек. За один ход разрешается соединить любые 2 точки отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать хода.

Решение: выигрывает начинающий, если он первым ходом соединит такие 2 точки, чтобы на окружности по обе стороны проведенного им отрезка остались по 43 точки, тогда 2 игрок сможет соединить только точки, которые находятся по одну сторону от 1 хорды. Каждый следующий ход 1 игрока должен быть симметричен ходу 2 игрока относительно 1 хорды. Тогда если 2 игрок может сделать ход, то может сделать ход и начинающий игрок. Поскольку после каждого хода кол-во точек убывает, наступит момент, когда второй игрок не сможет сделать ход и проигрывает.

Ответ: начинающий игрок выигрывает.

№ 7

Две девочки поочерёдно отрывают лепестки у ромашки. За один ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два лепестка, бывших соседними до начала игры. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток.

Решение: Игру можно выиграть, если ходить вторым и повторять ходы противника, ведь если первому игроку есть вариант оторвать лепесток (лепестки), то он есть и у второго (если изначально количество лепестков чётное). Если же количество лепестков нечётное, то после первого хода противника второй должен привести количество лепестков к чётному (если первый оторвал 1 лепесток, оторвать два, или наоборот) и воспользоваться той же стратегией, что и в случае с четным количеством.

Ответ: Игру выиграет вторая девочка.

№ 8

На клетчатой бумаге отмечен квадрат 24x24 клетки. Игроки по очереди вычёркивают какую-то строку или какой-то столбец (если в них есть ещё не вычеркнутые клетки). Выигрывает тот, кто вычеркнул последнюю клетку.

Решение: Игра будет выиграна в том случае, если второй игрок всегда будет повторять («зеркалить») ходы первого игрока, так как количество строк и столбцов изначально четное. Т.е. если есть куда ходить первому игроку, то есть куда ходить и второму, а количество невычеркнутых строк и столбцов убывает, поэтому настанет момент, когда первому будет нечего вычеркивать.

Ответ: Игра выигрывает второй игрок.

№ 9

Двое по очереди ставят числа вместо звёздочек. Первый стремится, чтобы все равенства выполнялись а второй- чтобы среди них были неверные.

=

+=*

++*=*

Решение: Первым ходом нужно поставить любое число во второе уравнение слева от равно. Тогда в каждом равенстве останется четное количество звездочек, и на каждый ход второго первый игрок ответит своим ходом в том же равенстве так, чтобы все равенства были верные.

Ответ: Выигрывает начинающий.

№ 10

Два игрока поочередно делают ходы на клетчатой доске 19*88. За один ход игрок закрашивает одну или несколько клеток, образующих квадрат. Закрашивать клетки дважды нельзя. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку.

Решение: Так как на одной стороне нечетное количество клеток, начинающий игрок обеспечит себе победу в том случае, если закрасит первым квадрат 18 на 18 посередине длинной стороны доски.

Тем самым он оставит две симметричные области 19 на 35 клеток и полоса 18 на 1 клетку. Далее начинающий делает симметричные ходы второго, тем самым если второму есть куда ходить - то и первому есть куда ходить. В конце концов наступит тот момент когда второму будет нечего закрашивать и первый победит.

Ответ: начинающий выиграет.

№ 11

Король стоит на поле 18 шахматной доски. За свой ход игрок имеет право сдвинуть его на одно поле вниз, или на одно поле влево – вниз по диагонали. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Какая игра с камнями соответствует этой?

Решение: Начнём их решения задачи с конца. Если король на а1 то тот, чья очередь ходить, проиграл. Отметим это поле знаком минус. Если король стоит на поле, с которого можно попасть на поле со знаком минус, то начинающий пойдёт на а1 и выиграет. Отметим эти поля знаком плюс (а2; в2; в1). Продолжим расстановку плюсов и минусов пользуясь правилами: 1) Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле со знаком минус, то ставим на него +. 2) Если с рассматриваемого поля все ходы ведут на поля со знаком плюс ставим минус. Итоги получаем расположение плюсов, минусов показанное на рисунке. Т.к. король стоит на поле со знаком плюс то начинающий выиграет, если будет ходить на поля со знаком минус.

8	+	+	+	+	+	+•		
7	-	+	-	+	-	+		
6	+	+	+	+	+	+		
5	-	+	-	+	-	+		
4	+	+	+	+	+	+		
3	-	+	-	+	-	+		
2	+	+	+	+	+	+		
1	-	+	-	+	-	+		
	a	b	c	d	e	f	g	h

Эта игра похожа на следующую игру с камнями: Лежат две кучки с камнями первой кочки семь камней во второй пять камней. За один ход можно взять либо один камень из одной кучки или по одному камню из двух кучек. Проиграет тот, кому нечего брать Кто выиграет какой должна быть его стратегия?

Каждому положению Короля на доске соответствует 2 кучки камней. В первой кучке камней столько, сколько горизонталей под королем. Во второй столько, сколько вертикалей слева. Можно установить соответствия между ходами. Первым ходом начинающий взял по одному камню из двух кучек (Король на Е7). А далее на каждый ход второго игрока начинающий отвечает следующим образом: Если второй взял 1 камень из одной кучки то начинающий берет 1 камень из этой же кучки; Если второй взял по 1 камню из обеих кучек то первый тоже берет по 1 камню из обеих кучек. Так происходит до тех пор пока начинающий не возьмёт последний камень.

Ответ: начинающий выиграет.

№ 12

Имеется две кучки по 10 камней. Двое поочерёдно берут камни из какой-нибудь кучки, но игрокам запрещается брать такое количество камней, при котором в кучках в результате остаётся одинаковое количество камней. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень.

Решение: Рассмотрим изоморфную задачу на клеточной доске 11*11 клеток. Количество горизонталей ниже и вертикалей левее фишки означают количество камней в каждой из кучек. Т.к. игрокам нельзя брать такое количество камней, при котором в кучках останется одинаковое количество камней, соответствующие клетки диагонали пометим как запрещённые для хода (кроме клетки 1:1, которая соответствует тому, что забран последний камень). Т.к. можно брать произвольное количество камней из 1 кучки, то фишка будет ходить на любое количество клеток влево, либо вниз (за исключением запрещённых клеток), т.е. как ладья.

11	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	•
10	+	+	+	+	+	+	+	+	+		-
9	+	+	+	+	+	+	+	+		+	+
8	+	+	+	+	+	+	+		-	+	+
7	+	+	+	+	+	-		+	+	+	+
6	+	+	+	+	+		-	+	+	+	+
5	+	+	+	-		+	+	+	+	+	+
4	+	+	+		-	+	+	+	+	+	+
3	+	-		+	+	+	+	+	+	+	+
2	+		-	+	+	+	+	+	+	+	+
1	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Если фишка стоит на поле 1:1, то тот, чья очередь ходить, проиграл (т.к. ходить некуда). Со всех полей 1 горизонтали и со всех полей 1 вертикали за 1 ход можно попасть на поле 1:1, поэтому отметим их знаком +.

Далее расставим плюсы и минусы на всех полях, по следующим правилам:

1) Если с рассматриваемого поля за 1 ход можно попасть на поле, отмеченное знаком минус, ставим плюс.

2) Если всё ходы ведут на поля, отмеченные плюсами, ставим минус.

Расстановка знаков показана на рисунке и мы можем выделить проигрышные ситуации, которые соответствуют количеству камней в кучках: 2-1 (или 1-2, для задачи с камнями порядок не важен) 3-4; 5-6; 7-8; 9-10.

Начинающий выиграет, если будет каждым ходом ходить на минус; т.к. тогда противник будет вынужден пойти на плюс. Так будет продолжаться, пока фишка не попадёт на поле 1:1, с которого никуда пойти нельзя. Попадёт она туда после хода начинающего.

В задаче с камнями стратегия начинающего заключается в том, чтобы каждым ходом сводить игру к проигрышной комбинации камней (их всего пять). Т.е. первым ходом начинающий забирает 1 камень из кучки приводя к комбинации 9-10; а затем выбирает проигрышные комбинации, исходя из хода второго игрока

Ответ: Начинающий выигрывает.

№ 13

Имеются две кучки по 9 камней. Двое по очереди берут либо 1, либо 2 камня из одной кучки, либо 1 или 2 камня из другой, либо по одному из каждой кучки. Выигрывает тот, кто заберет последний камень.

Решение: Начнем с конца. Проигрывает тот, кому останется 3 камня в любой комбинации по кучкам, т.к. он сможет забрать 1 или 2 камня, и противнику останется соответственно 2 или 1 камня, которые он заберет и выиграет.

Также проигрышным будет любое положение, при котором остается общее кол-во камней кратное 3.

Т.к. изначально общее кол-во камней равно 18, то начинающий проигрывает. Для обеспечения себе победы второй игрок должен каждый раз оставлять первому кол-во камней, кратное 3.

Ответ: начинающий проигрывает.

№ 14

Есть 2 кучки конфет, по 9 в каждой. За один ход нужно переложить из одной кучки в другую одну конфету и съесть две конфеты из какой-нибудь кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

Решение: Каждый раз убывает 2 конфеты, изначально всего 18 конфет, т.е. максимально может быть 9 ходов, или 8, если последний ход невозможен. Т.е. если перед последним ходом остается 1-1, то ход возможен, и выиграет первый. А если остаётся 0-2, то ход не возможен и выиграет второй.

Комбинация 1-1 возможна, когда перед этим ходом комбинация 2-2 или 4-0, т.е. разница между кол-вом камней в кучках равна 0 или 4. И далее рассматривая наши предыдущие ходы, мы видим что разница между кол-вом камней в кучках может быть равна 0,4,8,12..

Комбинация 2-0 возможна только в случае предыдущего положения 3-1 с разницей 2, в предыдущих комбинациях возможна разница 2,6,10,14.

Т.к. начальное положение 9-9 с разностью 0, то выиграет первый игрок при любой стратегии.

Ответ: начинающий выигрывает.

№ 15

На столе лежат 2 кучки конфет, в одной – 7, а в другой – 6 конфет. Ход состоит в том, что играющий съедает в одной из кучек, а другую делит на две части. Если он не сможет разделить эту кучку на две части из-за того, что в неё одна конфета, то он съедает и выигрывает.

Решение: После своего хода нельзя оставлять комбинацию 1-n (в одной кучке 1 конфет, в другой n. Порядок не важен), так как тогда противник съест n конфет из второй кучки, не сможет разделить кучку из 1 конфеты, съест ее и выиграет.

Значит, выигрыш обеспечит себе игрок, который после своего хода оставит комбинацию из которой обязательно получится 1-n.

Это выполняется только для двух комбинаций: 3-3 и 3-2. В случае 3-3: 3 съедает, 3 нужно разделить на кучки и сделать это можно способом 1-2. В случае 3-2 кучка 2 или 3 съедается, другая делится: 3 на 1-2; 2 на 1-1.

Из начальной комбинации можно получить комбинацию 3-3, если начинающий съест конфеты из кучки 7 конфет, а оставшуюся кучку из 6 конфет делит на 3-3. При таком первом ходе начинающий выигрывает.

Ответ: начинающий выигрывает

№ 16

Двое пишут десятизначное число. Первую цифру пишет первый, вторую – второй, третью – первый и т.д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число делилось на 9?

Решение: Второй может добиться того, чтобы число делилось на 9. Для этого ему достаточно точно каждый раз приписывать цифру 9-n, где n - цифра, написанная первым. Тогда сумма каждых двух цифр будет равна 9, а сумма цифр числа: 5пар × 9 = 45.

45 ⋮ 9, значит, число делится на 9 по признаку делимости.

Ответ: да, может.

4. ГРАФЫ

В этой главе речь пойдет о замечательных математических объектах. Они возникают и оказываются чрезвычайно полезными при решении многих внешне не похожих друг на друга задач. Однако графы интересны и сами по себе. В математике есть специальный раздел, который так и называется: «Теория графов». Мы постараемся ввести вас в круг начальных идей этой теории и показать, как графы применяются при решении задач.

Понятие графа.

Задача 1. В стране Алфавит 10 городов : А,Б,В,Г,Д,Е,Ж,З,И,К и 10 непересекающихся дорог: между городами А и Б, Е и Г, В и Д, И и Б, Ж и К , З и Д, Е и А, К и В, И и Г , Ж и З. Можно ли по этим дорогам проехать из города А в город К?

Решение: Давайте попробуем изобразить условие задачи графически: городам будут соответствовать точки, а соединяющим их дорогам – непересекающиеся между собой линии (рис. 1). Теперь видно, что проехать из А в К нельзя.

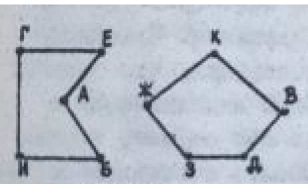


Рис.I

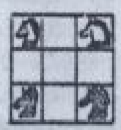


Рис.2

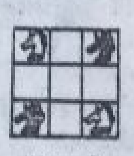


Рис.3

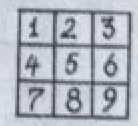


Рис.4

Задача 2. Можно ли, сделав несколько ходов коням из исходного положения, изображенного на рис. 2, расположить их так, как показано на рисунке 3?

Решение. Обозначим цифрами 1,2,3,…..9 клетки доски так как показано на рисунке 4. Сопоставим им точки плоскости, и если из одной клетки можно попасть в другую ходом коня то соединим соответствующие точки линий(рис.5). Исходная и итоговая расстановка полей изображены на рис.6.

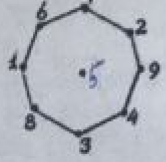


Рис.5

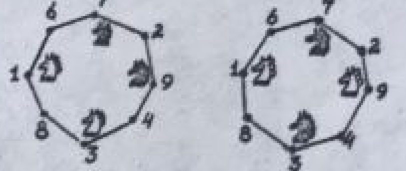


Рис.6

Теперь уже совершенно ясно, что переставить коней требуемым образом невозможно, так как в итоговой расстановке белые и черные кони чередуются.

Как видите, при решении этих двух задач оказалось полезным представить условия в терминах картинки, на которой изображены точки и соединяющие их линии. Такие картинки и называются графами. Более строго: граф состоит из некоторых точек (называемых вершинами), некоторых из которых соединены линиями (называемыми ребрами).

Вот еще две задачи, для решения которых полезно нарисовать граф.

Задача 3. Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения, изображенного на рис.7, расположить их так, как показано на рисунке 8.

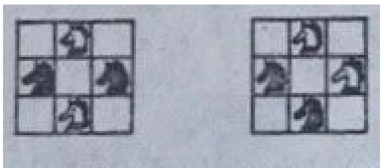


Рис.7 Рис.8

Задача 4. В стране цифры 9 городов с названиями 1,2,3,…9, некоторые из них соединены авиалиниями. Путешественник Дима обнаружил, что два города соединены авиалиниями в том и только том случае, когда двухзначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

Заметим что один и тот же графможно изобразить по разному. Так, граф из задачи 1 мог быть на рисован иначе (рис.9). Важно лишь какие вершины соединены друг с другом ребрами, а какие – нет.

Такие одинаковые, но быть может по-разному нарисованные графы принято называть изоморфными. Попробуйте найти на рис.10 графы, из задачи 2.(рис. 5).

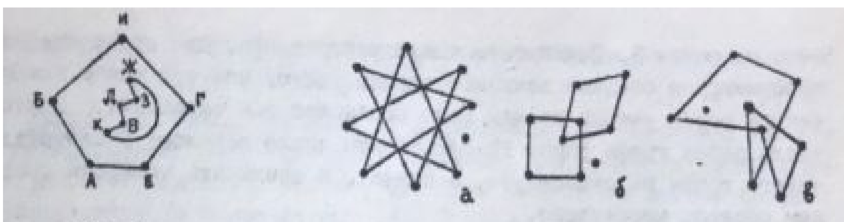
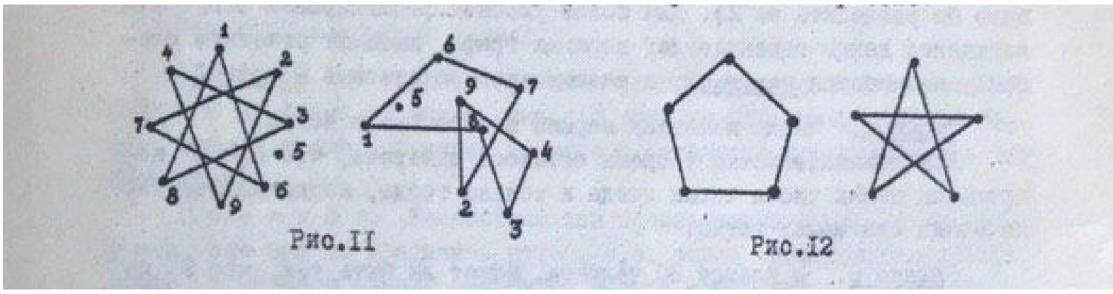


Рис.9 Рис.10

Правильный ответ-графы а и в. В том, что они изоморфны графу из задачи 2, легко убедится. Для этого достаточно правильно занумеровать вершины (рис.11).

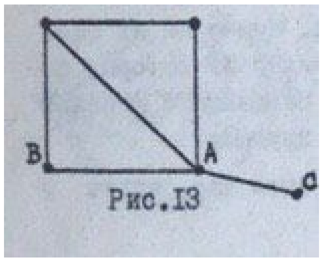
Доказательство неизоморфности графов, изображенных на рис.10, 6 и 5, несколько сложнее. Мы вернемся к нему позже.

Задача 5 . Изоморфны ли графы, изображенные на рис 12?



Степени вершин и подсчет числа ребер

Мы с вами определили граф как набор точек(вершин), некоторые из которых соединены между собой линиями(ребрами). Количество ребер, выходящих из данной вершины, мы будем называть ее степенью. Так, в графе изображенном на рис. 13, вершина имеет степень 3,вершина B – степень 2, вершина C – степень 1.



Задача 6. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 5 другими?

Решение. Предположим, что это возможно. Рассмотрим тогда граф, вершины которого соответствуют телефонам, а ребра – соединяющим проводом. В этом графе 15 вершин, степень каждой из которых равна 5. Подсчитаем число ребер графа. Для этого сначала просуммируем степени всех его вершин. Ясно, что при таком подсчете каждое ребро учтено дважды (оно соединяет две вершины!). Поэтому число ребер графа ровно 15*5/2.Но это число нецелое!

Следовательно, такого графа не существует, а значит, и соединить телефоны требуемым образом не возможно.

При решении этой задач мы объяснили, как подсчитать число ребер графа, зная степени всех его вершин. Для этого нужно просуммировать степени вершин и полученный результат разделить на 2.

Задача 7. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Отметим, что из вышесказанного можно получить следствие: сумма степеней всех вершин графа должна быть четной(иначе ее нельзя было бы разделить на 2). Для более удобной формулировки этого утверждения дадим определение: вершина графа, имеющая нечетную степень, называется нечетной, а имеющая четною степень - четной.

Теорема.

Число нечетных вершин любого графа четно.

Для доказательства теоремы осталось отметить, что сумма нескольких целых чисел четна тогда и только тогда, когда количество нечетных слагаемых четно.

Задача 8. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 2- по 4 друга, а 10 по 5 друзей?

Решение: Если бы это было возможно, то можно было бы нарисовать граф с 30 вершинами, 9 из которых имели бы степень 3, 2-степень 4, 10 степень 5. Однако у списанного графа 19 нечетных вершин, что противоречит теореме.

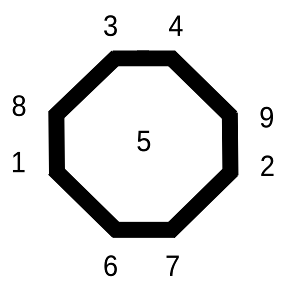
Задачи раздела «Графы»

№ 1

Можно ли, сделав несколько ходов конями из исходного положения на рисунке 1, расположить их так, как показано рисунке 2.

Решение: Что бы разобраться в решении этой задачи нам нужно создать 3 таблички, 2 из которых начальное и конечное положение шахматных фигур и 1 – пронумерованные клетки поля. Когда все таблички построены, мы рисуем граф так, с какой клетки на какую можно попасть, сходив ходом коня.

	Б	
Ч		Ч



	Б	

Рис.1

	Б	
Ч		Б
	Ч	

Рис.2

1	2	3
4	5	6
7	8	9

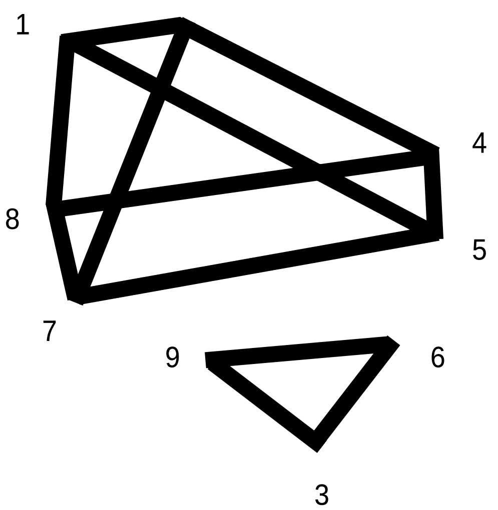
Мы видим, что фигуры начали чередоваться по цветам, следовательно, нельзя получить такую расстановку фигур как показано на рисунке.

Ответ: нельзя.

№ 2

В стране цифры 9 городов с названиями1,2,3,4,5,6,7,8,9,некоторые из них соединены авиалиниями. Путешественник Дима обнаружил, чтодва города соединены авиалиниями в том и только том случае, когда двухзначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться из города 1 в город 9?

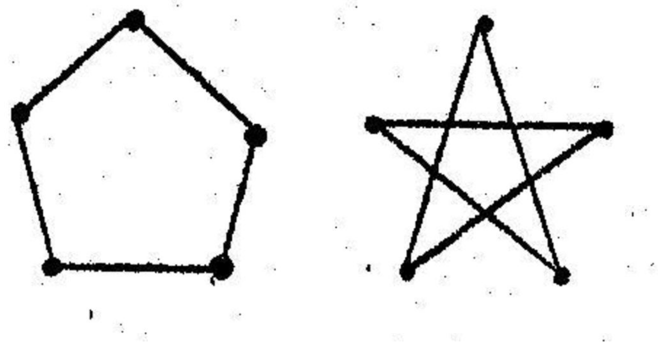
Решение: Для того что бы узнать можно ли перелететь из города 1 в город 9 надо составить граф. Соединим все цифры, которые в сумме дают число кратное 3. С помощью таблицы мы увидели, что даже рейсов с пересадками не найдется что бы, из города 1 перелететь в город 9.



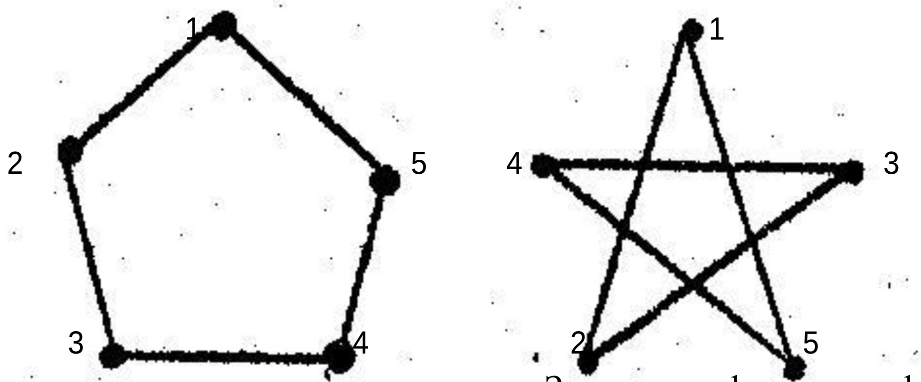
Ответ: нельзя.

№ 3

Изоморфны ли графы, изображенные на рисунке?



Решение: Мы знаем, что изоморфные графики имеют такое свойство, что: Если пронумеровать вершины двух изоморфных графиков, то все вершины второго будут соединяться с теми двумя вершинами что и на первом графике. Пронумеруем вершины первого графика и попробуем так же пронумеровать вершины второго, доказывая изоморфность графов.



Мы смогли пронумеровать вершины. Значит, графы изоморфны

Ответ: Изоморфны.

№ 4

В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

Решение: т.к. в государстве 100 городов, и из каждого выходит 4 дороги то следовательно 100 * 4 = 400, но дороги имеют начало в одних городах , а конец в других то следовательно 400 : 2 = 200

Ответ: 200

№ 5

В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя; 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью; 3 телефона, каждый из которых соединен о пятью другими?

Решение: нет, т.к. получится граф, в котором есть 3+4= 7 вершин нечетной степени (степень 3 или степень 5), что противоречит теореме о числе нечетных вершин.

Ответ: нет

№ 6

У короля 19 вассалов. Может ли быть так, чтобы у каждого вассала было 1; 5 или 9 соседей?

Решение: нет, не может. Получился бы граф соседства с нечетным количеством (19) нечетных вершин (степени 1 или 5 или 9), что противоречит теореме о числе нечетных вершин.

Ответ: нет.

№ 7

Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог.

Решение: Рассмотрим граф. Для того, чтобы граф имел 100 ребер, сумма всех степеней его вершин должна быть равна 200. Но так как 200 не делится нацело на 3, то не получается целого количества вершин, что быть не может.

Ответ: Нет, не может.

№ 8

Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются семь островов, с каждого из которых ведет один, три или пять мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Решение: Рассмотрим граф с 7 вершинами. Каждая вершина имеет нечетную степень, что противоречит теореме, т.е. такой граф не существует. А если рассмотреть берег озера, как 8 вершину графа, то такой граф возможен при условии, что на берег ведет нечетное количество мостов, т.е. 1, 3 или более.
Ответ: Да, верно.

№ 9

Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.
Решение: Составим граф, в котором вершинами будут люди, а рёбрами — сделанные ими рукопожатия: каждую пару вершин будет соединять столько рёбер, сколько рукопожатий сделали соответствующие люди. Если бы число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, было нечётным, то тогда в нашем графе было бы нечётное число вершин, из которых выходит нечётное число рёбер, то есть нечётное число вершин нечётной степени. Тогда сумма степеней всех вершин была бы нечётным числом, так как сумма любого числа чётных чисел чётна, а сумма нечётного числа нечётных чисел нечётна. Но в решении предыдущей задачи было доказано, что сумма степеней всех вершин графа всегда чётна. Получаем противоречие. Значит, число людей, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно, что и требовалось доказать.

№ 10

Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
Решение: Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют отрезку. Вершины будем соединять ребром, если соответствующие отрезки пересекаются. Тогда получим, граф в котором нечетное число (9) нечетных вершин 9степень каждой вершины 3). Значит, так нарисовать отрезки не получится.
Ответ: нельзя.

№ 11

Докажите, что граф с K вершинами, степень каждой из которых не менее (k–1) /2, связан.

Решение: Рассмотрим две произвольных вершины и предположим, что они не соединены путем, то есть такой последовательностью ребер, в которой начало очередного ребра совпадает с концом предыдущего. Каждая из этих двух вершин по условию соединена не менее, чем с (k-1)/2 другими; при этом все упомянутые вершины различны – ведь если какие-то две из них совпадают, то есть путь, соединяющий исходные вершины. Таким образом, в графе не менее (k-1)/2 + (k-1)/2 + 2 = k + 1 вершин. Противоречие с условием, значит, исходный граф является связанным.

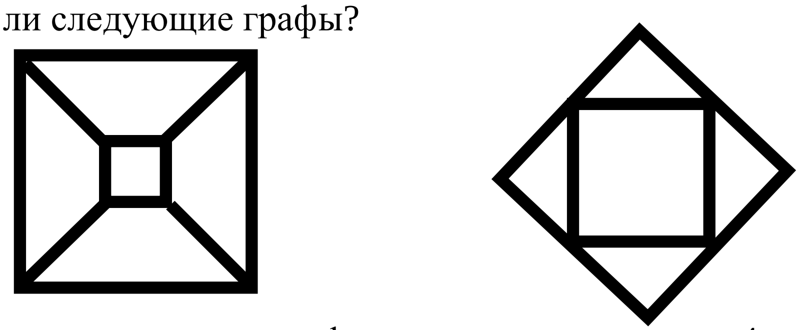
№ 12

В стране из каждого города выходит 100 дорог и из любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите что все равно из любого города можно добраться до любого другого.

Решение: Предположим, что закрытие одной дороги привело к тому, что граф стал не связным (т.е. что существуют города, из которых невозможно проехать в другой город). Т.е. граф разбился на 2 компонента связности, когда убрали ребро их соединяющие. Тогда в каждом компоненте связности все вершины, кроме одной имеют степень 100, а одна имеет степень 99 (тот город одну из дорог которую закрыли на ремонт). Но это противоречит теореме о том, что число нечетных вершин графа должно быть четно, а значит, первоначальное предположение о том, что с удаление 1 ребра граф стал не связным, не верно. Следовательно даже после закрытия одной дороги на ремонт все равно из любого города можно добраться до любого города. Что и требовалось доказать.

№ 13

Изоморфны ли следующие графы?



Решение: Нет т.к. во втором графе есть вершины степени 4 и 2, а в первом графе все вершины имеют степень 3.

Ответ: нет, не изоморфны.

№ 14

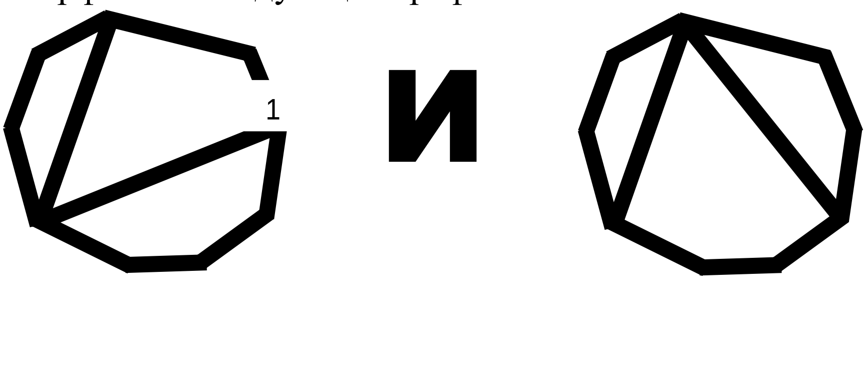
Изоморфны ли следующие графы?

Решение: Нет т.к. в первом графе есть вершина 3, соединенная ребрами одновременно с обеими вершинами степени 3 (т.е. с вершинами 1,2), а во втором графе нет вершин одновременно соединенной с вершинами 1,2, имеющими степень 3.

Ответ: нет не изоморфны.

№ 15

Изоморфны ли следующие графы?



Решение: Нет т.к. в первом графе есть вершина 1 (степени 2), соединённая ребрами одновременно с обеими вершинами степени 3, а во втором графе такой вершины нет.

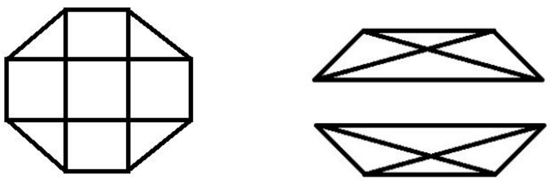
Ответ: нет не изоморфны.

№ 16

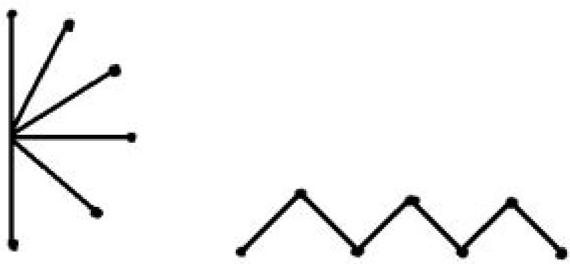
Верно ли, что два графа изоморфны, если: А) у них по 8 вершин, степень каждой из которой равна 3? Б) Они связны, без циклов и содержат по 6 рёбер? В) У них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9?

Решение:

А) Нет, не верно, так как один граф с 8 вершинами степени 3 может быть связным, а другой не связным:



Б) Нет, не верно. Например, можно изобразить граф с вершинами степеней 1 или 2 , а можно изобразить граф, в котором есть вершина степени 6.



В) Да, верно, т.к получается что каждая из 10 вершин соединена с каждой из оставшихся 9 вершин.

№ 17

В связном графе степени 4 вершин равны 3, а степени остальных вершин равны 4.Докажите, что нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на 2 изоморфные компоненты связности.

Решение: Предположим обратное, т.е. что при удаление ребра граф распался на 2 изоморфные компонента связности. Рассмотрим все случаи.

1. Удалено ребро, соединяющее 2 вершины степени 3. Т.е стало 2 вершины степени 2, 2 вершины степени 3 и остальные степени 4. Если компоненты связности изоморфны, то 2 вершины степени 3 должны быть поделены поровну, т.е по одной в каждом компоненте. Это противоречит теореме о четном количестве не чётных вершин в графе, т.е такая ситуация невозможна.
2. Удалено ребро, соединяющее 2 вершины степени 4; тогда станет 6 вершин степени 3 и остальные степени 4. Для изоморфности компонент вершины степени 3 должны быть распределены между ними поровну, т.е по 3 вершины в каждом компоненте связности, что снова противоречиттеореме чётном количестве нечётных вершин графа, т.е снова невозможная ситуация.
3. Удалено ребро, соединяющее вершину степени 4 и вершину степени 3. Тогда в графе станет 1 вершин степени 2, 4 вершины степени 3и остальные степени 4. Одна вершина степени 2 будет принадлежать одной из компонентов связности, а в другой вершины степени 2 не будет, значит компоненты связности не будут изоморфны.

Значит, первоначальное предположение неверно, и нельзя удалить ребро так, чтобы граф распался на 2 изоморфные компоненты связности.

5. КОМБИНАТОРИКА И ВЕРОЯТНОСТЬ

§1. Введение

Вам, наверное, приходилось слышать высказывания типа «это маловероятно», «я с большой вероятностью поеду летом в лагерь» и т.д. Оказывается, что понятию вероятность можно придать строгий математический смысл и вычислять вероятность некоторых событий. В этой брошюре мы ограничимся самыми простыми вероятностными задачами.

По-видимому, ни у кого не вызывает сомнений, что при подбрасывании монеты **орёл**, как, впрочем, и **решка,** выпадает в половине случаев, а при бросании игрального кубика **тройка** выпадает в 1/6 части случаев. Поэтому естественно считать вероятность выпадения орла равной ½, а выпадения тройки – 1/6.

Договоримся теперь, что вероятность – это число от 0 до 1, количественно выражающее шансы наступления какого-то исхода (выпадение орла) при некотором действии (бросание монеты). В частности, равенство нулю вероятности наступления некоторого исхода означает, что соответствующий исход вообще не может наступить (например, выпадение семёрки при бросании кубика), а тот факт, что вероятность некоторого исхода равна 1, означает, что этот исход неизбежно наступит. Кроме того, поскольку действие должно завершиться каким-то исходом, сумма вероятностей всех исходов должна быть равна 1.

Попробуем теперь сосчитать вероятность такого события: **при двух последовательных бросаниях монеты выпало два орла.** Выпишем все возможные исходы (О - орёл, Р - решка): ОО, ОР, РО, РР. Итак, всего исходов 4. Один из них – ОО – является для нашего события благоприятным. Поэтому вероятность выпадения двух орлов равна ¼.

А какова вероятность того, что при двух последовательных бросаниях монеты выпадут и орёл, и решка? Среди тех же четырёх исходов благоприятными являются теперь два (ОР и РО). Поэтому искомая вероятность равна 2/4=1/2.

Приведённые рассуждения справедливы только при условии, что все четыре возможных исхода (ОО, ОР, РО, РР) равновероятны. На самом же деле в реальной ситуации это может оказаться не так. На это может повлиять неправильная форма монеты, неровный стол, стиль подбрасывания и т.д. Кроме того, необходимо, чтобы результат второго бросания не зависел от результата первого. Эти и подобные им условия мы всегда будем считать выполненными.

Итак, чтобы вычислить вероятность события (например, выпадение и орла, и решки при двух бросаниях монеты), необходимо найти число благоприятных исходов и разделить его на число всех исходов.

Повторим ещё раз, что такой подсчёт справедлив только тогда, когда все исходы считаются равновозможными.

Теперь мы переходим к изучению математической дисциплины, называемой «Комбинаторика». В процессе изучения мы научимся решать более трудные вероятностные задачи.

§2. Простейшие методы подсчёта.

Начнём с нескольких простых задач.

Задача 1. В магазине «Всё для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцами?

Решение. Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трёх блюдец. Поэтому есть три разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, то число комплектов равно 5•3=15.

Задача 2. В магазине «Всё для чая» есть ещё 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, ложки и блюдца?

Решение. Выберем любой из комплектов предыдущей задачи. Его можно дополнить ложкой 4 разными способами. Поэтому общее число возможных комплектов равно 5•3•4=60.

Совершенно аналогично решается следующая задача.

Задача 3. В Стране Чудес есть три города: А, Б, В. Из города А в город Б ведёт 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги(рис. 1). Сколькими способами можно проехать от А до В?

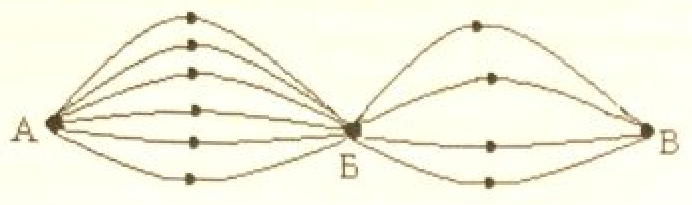


Рис. 1.

Ответ: 6•4=24.

В решении следующей задачи появляется новое соображение.

Задача 4. В Стране Чудес построили ещё город Г и несколько новых дорог (рис. 2). Сколькими способами можно теперь добраться из города А в город В?

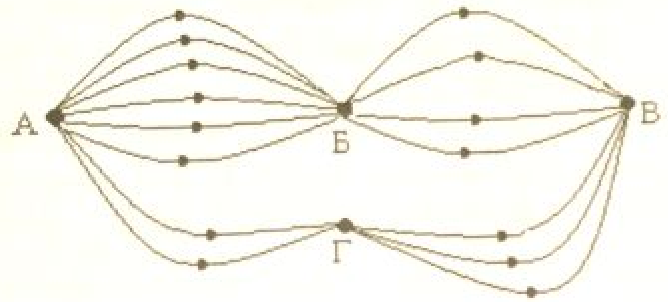


Рис. 2.

Решение. Выделим два случая: путь проходит через город Б или через город Г. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных маршрутов (в первом – 6•4=24, во втором – 2•3=6). Складывая, получаем общее количество маршрутов: 6•4+2•3=30.

Задача 5. В магазине «Всё для чая» по-прежнему продаётся 5 чашек, 3 блюдца и 4 ложки. Сколькими способами можно купить два предмета с разными названиями?

Решение. Возможны три разных случая: первый – покупается чашка с блюдцем, второй – чашка с ложкой, третий – блюдце с ложкой. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных вариантов (в первом –

5•3=15, во втором – 5•4=20, в третьем – 3•4=12). Складывая, получаем общее число возможных вариантов – 47.

Задача 6. Игрок подбрасывает монету и игральный кубик. Какова вероятность того, что выпадут орёл и четное число?

Решение. Всего различных исходов 2•6=12. Из них благоприятных: 1•3=3. Таким образом, вероятность равна 3/12=1/4.

На этом мы заканчиваем первый цикл задач, иллюстрирующий на простейших примерах использование операций сложения и умножения при подсчете вариантов.

Задача 7. Назовем натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует четырёхзначных «симпатичных» чисел?

Решение. Понятно, что однозначных «симпатичных» чисел ровно 5. К каждому однозначному «симпатичному» числу вторая нечетная цифра может быть дописана пятью различными способами. Таким образом, двузначных «симпатичных» чисел всего 5•5. Аналогично трёхзначных «симпатичных» чисел 5•5•5 и четырехзначных 5•5•5•5=5^4 .

В этой задаче ответ имеет вид m^n. К такому ответу приводят задачи, в которых на каждом из n мест (в предыдущей задаче – разряды числа) может быть поставлен элемент из некоторого m-элеметного множества (5 нечетных цифр). Будьте внимательны и не путайте, какое число должно быть основанием степени, а какое – показателем.

Рассмотрим ещё четыре подобные задачи.

Задача 8. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Ответ: 2^3.

Задача 9. Каждую клетку квадратной таблицы 2*2 можно покрасить в чёрный или белый цвет. Сколько существует различных окрасок таблицы?

Ответ: 2^4.

Задача 10. Сколькими способами можно заполнить вариант на «Спортпрогнозе»? В этой лотерее нужно предсказать итог 13 спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд или ничья; счёт роли не играет.

Ответ: 3^{13}.

Задача 11. Алфавит племени Мумба-Юмба состоит из трёх букв: А, Б, В. Словом является любая последовательность, состоящая не менее чем из одной и не более чем из четырёх букв. Сколько слов в языке племени Мумба-Юмба?

Указание. Сосчитайте отдельно количество одно-, двух-, трёх- и четырехбуквенных слов.

Ответ: $3+3^2+3^3+3^4=120$.

А теперь – вероятностная задача с той же идеей подсчета.

Задача 12. Игральный кубик бросают трижды. Какова вероятность того, что все три полученных числа- нечётные?

Ответ: $3^6/6^3=(3/6)^3=(1/2)^3=1/8$

Перейдём к следующему циклу задач.

Задача 13. В футбольной команде 11 человек. Нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Капитаном может стать любой из 11 человек. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть 11•10=110 разных вариантов выборов.

Эта задача отличается от предыдущих тем, что выбор капитана ограничивает круг претендентов на роль заместителя: капитан не может быть своим заместителем. Таким образом, выборы капитана и его заместителя не являются независимыми – таким, как, например, выборы чашки и ложки в задаче 1.

Вот ещё пять задач на эту тему.

Задача 14. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя 6 различных цветов?

Решение. Цвет для верхней полоски флага можно выбрать шестью разными способами. После этого для средней полоски флага остаётся 5 возможных цветов, а затем для нижней полоски флага – 4 различных цвета. Таким образом, флаг можно сделать 6•5•4=120 способами.

Задача 15. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи, так, чтобы они не били друг друга?

Решение. Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьёт 15 полей, включая поле, на котором она стоит. Поэтому остаётся 49 полей, на которые можно поставить чёрную ладью. Таким образом, всего есть 64•49=3136 разных способов.

Задача 16. Из колоды в 36 карт по очереди вынимают две карты. Какова вероятность того, что обе они тузы?

Решение. Всего возможно 36•35 исходов. Из них благоприятными являются 4•3 исходов.

Ответ: 4•3/36•35=3/9•35=1/3•35=1/105.

Следующие две задачи несколько труднее.

Задача 17. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного королей так, чтобы получить допустимую правилами игры позицию?

Решение. Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому необходимо разобрать три случая:

а) если белый король стоит в углу (углов всего 4), то от бьет четыре поля, и остаётся 60 полей, на которые можно поставить чёрного короля;

б) если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей 4•6), то он бьет 6 полей, и для чёрного короля остаётся 58 возможных полей;
в)если же белый король стоит не на краю доски (таких полей 6•6), то он бьет 9 полей, и для чёрного короля остаётся 55 возможных полей.
Таким образом, всего есть 4•60+24•58+36•55=3612 способов расстановки королей.

Задача 18. Из колоды в 36 карт вынимают по одной карте каждой масти. Какова вероятность того, что все эти карты – разных достоинств, причём самая старшая из них – пиковой масти?

Решение. Всего возможно 9^4 исходов. Подсчитаем благоприятные исходы. Очевидно, что карта пиковой масти должна быть не младше девятки.
Разберём случаи:
а)выбрана девятка пик. Тогда для других трёх карт остаётся 3•2•1=6 способов выбора.
б)девятка пик – 4•3•2=24 способа;
в)валет пик – 5•4•3=60 способов;
г)дама пик – 6•5•4=120 способов;
д) король пик – 7•6•5=210 способов;
е)туз пик – 8•7•6=336 способов.
Таким образом, искомая вероятность равна
3•2•1+4•3•2+5•4•3+6•5•4+7•6•5+8•7•6/9^4=2•1+4•2+5•4+2•5•4+7•2•5+8•7•2/3•9^3
= =252/3•$9^3$28/3•$9^2$28/243.

Следующий цикл задач посвящён подсчету способов, которыми можно расположить в ряд n различных предметов. Такие расположения называются перестановками и играют заметную роль в комбинаторике и алгебре. Но прежде необходимо сделать небольшое отступление.
Пусть n – натуральное число; n! (читается «эн-факториал») – это произведение 1•2•3…•n. Таким образом, 1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120.

Следует иметь в виду, что для удобства написания некоторых комбинаторных тождеств принято считать **0! Равным 1.**

Упражнение 1. Упростите выражение: а) 10!•11; б)n!•(n+1).

Упражнение 2. Вычислите: а) 100!/98!; б) n!/(n-1)!.

Вернёмся теперь к перестановкам.

Задача 19. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

Решение. Будем рассуждать точно так же, как при решении задач предыдущего цикла. На первое место можно поставить любую из трёх цифр, на второе – любую из двух оставшихся, а на третье – последнюю оставшуюся цифру. Таким образом, всего получается 3•2•1=3!=6 чисел.

Задача 20. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, чёрный, синий и зелёный шарики?

Решение. На первое место можно положить любой из четырёх шариков, на второе – любой из трёх оставшихся, на третье – любой из двух оставшихся, а на четвёртое – последний оставшийся шарик.

Ответ: 4•3•2•1=4!=24.

Рассуждая так же, как при решении двух последних задач, легко доказать, что n разных предметов можно выложить в ряд таким числом способов: n(n-1)(n-2)•…•2•1. Таким образом, **число перестановок из n элементов равно n!.**

Для удобства формулировки задач следующего цикла примем такое соглашение. Словом будем называть любую конечную последовательность букв русского алфавита. Скажем, используя буквы А, Б, В ровно по одному разу, можно составить шесть слов: АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА. Используя же букву А дважды, а букву Б – один раз, можно составить три слова: ААБ, АБА, БАА. В следующих пяти задачах необходимо выяснить, сколько различных слов можно получить, переставляя буквы того или иного слова.

Задача 21. ВЕКТОР.

Решение. Так как все буквы слова различны, то всего можно получить 6! слов.

Задача 22. ЛИНИЯ.

Решение. В этом слове две буквы И, а все остальные буквы разные. Временно будем считать разными и буквы И, обозначив их $И_1$, $И_2$. При этом предположении получится 5! разных слов. Однако те слова, которые получаются друг из друга только перестановкой букв $И_1$, $И_2$, на самом деле одинаковы. Таким образом, полученные 5! слов разбиваются на пары одинаковых слов. Поэтому разных слов всего 5!/2=3•4•5=60.

Задача 23. ПАРАБОЛА.

Решение. Считая три буквы А этого слова различными: A_1, A_2,A_3, получим 8! разных слов. Однако слова, различающиеся лишь перестановкой букв А, на самом деле одинаковы. Поскольку буквы A_1 ,A_2,A_3 можно переставлять 3! способами, 8!слов разбивается на группы по 3! одинаковых слов. Поэтому разных слов всего 8!/3!=4•5•6•7•8.

Задача 24. БИССЕКТРИСА.

Решение. В этом слове три буквы С и две буквы И. Считая все буквы различными, получаем 11! слов. Отождествляя слова, различающиеся лишь перестановкой букв И, но не С, получаем 11!/2! различных слов. Отождествляя теперь слова, различающиеся перестановкой букв С, получаем окончательный результат 11!/2!•3!.

Задача 25. МАТЕМАТИКА.

Ответ: 10!/3!•2!•2!=1•…•10/1•2•3•2•2=4•…•10/2•2=5•…•10.

Цикл задач про слова продемонстрировал одно содержательное комбинаторное соображение – идею краткого подсчета. Вместо подсчета числа интересующих объектов иногда бывает удобно пересчитывать другие объекты, количество которых превосходит количество исходных в известное число раз.

Этот приём используется и при решении следующих четырёх задач.

Задача 26. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране.

Решение. Каждая авиалиния соединяет два города. В качестве первого города можно взять любой из 20 городов, а в качестве второго – любой из 19 оставшихся. Перемножив эти числа, получаем 20•19. Однако при этом подсчете каждая авиалиния учтена дважды (в первый раз, когда в качестве первого города был выбран город А, а в качестве второго город В, а второй раз – наоборот). Таким образом, число авиалиний равно 20•19/2=190.

Задача 27. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

Решение. В качестве первого конца диагонали можно взять любую из n вершин, а в качестве второго – любую из n-3 вершин, отличных от выбранной и двух соседних с ней. При этом подсчете каждая диагональ учитывается дважды.

Ответ: n(n-3)/2.

Задача 28. Игральный кубик бросают 12 раз. Какова вероятность того, что каждое число выпадет дважды?

Решение. Всего возможно 6^{12} исходов (число последовательностей из 12 чисел – итогов бросания; на каждом месте может стоять любое из шести чисел). Благоприятные исходы это всевозможные перестановки такой последовательности: 1,1,2,2,…,6,6 (две единицы, две двойки и т.д.). Число таких перестановок (см.задачи 22-25) ровно $12!/(2!)^6$.

Ответ: $12!/(2!)^6 \cdot 6^{12} = 12!/6^{12} \cdot 2^6$.

Задача 29. Бусы – это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных бус можно сделать из 13 различных бусин?

Решение. Разрежем кольцо, превратив его в нитку, у которой есть начало и конец. 13 разноцветных бусин можно нанизать на такую нитку 13!различными способами (число перестановок 13-и различных элементов). Возьмём один из таких вариантов, снова соединим разрезанные концы и повернем бусы на 1/13 полного угла, так, чтобы 1-я бусина заняла место 2-й, 2-я - место 3-й,…, 13-я – место 1-й. Мы получим вариант бус, который теперь (когда кольцо замкнуто) ничем не отличается от исходного, так как один получается из другого с помощью поворота. Всего мы можем совершить 12 таких поворотов, получив 12 вариантов, тождественных исходному. Таким образом, множество всех вариантов разомкнутых бус разбивается на группы по 13 вариантов в каждой. Варианты одной группы для замкнутых бус неразличимы, тем самым каждая группа представляет один вариант замкнутых бус. Значит, для замкнутых бус число вариантов в 13 раз меньше, чем для разомкнутых.

Ответ: 13!/13=12!.

Задача 30. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

Решение. Перевороты сокращают количество вариантов в два раза.

Ответ: 12!/2.

Следующая задача иллюстрирует ещё одно важное комбинаторное соображение.

Задача 31. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

Решение. Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определим количество шестизначных чисел, не обладающих нужным свойством. Так как это в точности те числа, в записи которых встречаются только нечётные цифры, то их количество очевидно равно 5^6. Всего шестизначных чисел $9 \cdot 10^5$. Поэтому количество шестизначных чисел, обладающих указанным свойством, равно $9 \cdot 10^5 - 5^6 = 900000 - 15625 = 884375$.

Решающим моментом был здесь так называемый переход к дополнению: подсчета «ненужных» вариантов вместо подсчета «нужных». Вот ещё одна задача, при решении которой полезно использовать это соображение.

Задача 32. В алфавите племени БУМ-БУМ шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени БУМ-БУМ?

Ответ: 6^6-6!.

Задача 33. Игральный кубик бросают четыре раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет шестерка?

Ответ: 6^4-5^4/6^4=671/1296.

Задачи §§ 1-2 для самостоятельного решения

№ 1

Из колоды в 36 карт внимают одну. Какова вероятность того, что она старше десятки?

Решение: Сначала определим сколько всего вариантов (благоприятные и не благоприятные), их 36.

Затем только благоприятные, т. к. старше десятки это Валет, Дама, Король, Туз и все они в 4 экземплярах (4 масти), то количество карт (Валет, Дама, Король, Туз) умножаем на кол-во мастей (4).

Получаем 16 благоприятных вариантов и делим на кол-во всех вариантов

$P = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Ответ: $\frac{4}{9}$

№ 2

На почте продаются 5 видов конвертов и 4 вида марок. Сколькими способами можно купить конверт с маркой?

Решение: Первый конверт можно купить с 4 разными марками так же и со вторым и последующими конвертами, соответственно и с конвертами, следовательно, 5 видов конвертов нужно умножить на 4 вида марок

5*4= 20

Ответ: 20 способов.

№ 3

На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами можно это сделать?

Решение: Для предложения нужно использовать по 1 слову каждой части речи, значит их нужно перемножить что бы узнать ответ.

2*5*7= 70 предложений

Ответ: 70 предложений.

№ 4

У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

Решение: каждую марку одного коллекционера можно поменять на одну из 20 другого. Итого20*20=400 обменов Аналогично по значкам 10*10 =100 Итог 400+100 =500.

Ответ: 500 способов.

№ 5

Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

Решение: Рассмотрим отдельно два случая: все цифры числа нечетные. Таких цифр пять, на первом месте может стоять любая из 5 цифр, на втором любая из 5 цифр, на третьем – шестом местах также любая из 5 нечетных цифр. Получаем $5*5*5*5*5*5=5^6$ чисел.

Теперь рассмотрим случай, когда все цифры нашего числа четные. Таких цифр тоже 5, и решение в целом аналогично первому случаю, за исключением того, что на первом месте не может стоять цифра 0, т.е. $4*5*5*5*5*5=4*5^5$.

Всего получаем $5^6 + 4*5^5 = 9*5^5$

Ответ: $9*5^5$

№ 6

На шахматную доску ставят а) белую и черную ладьи; б) белого и черного королей. Какова вероятность того, что они будут бить друг друга?

Решение: а) Первую ладью можно поставить на любое из 64 полей, вторую – на любое из оставшихся 63 полей, т.е. всего способов расстановки 2 ладей на доске 64*63=4032

При этом ладья бьет 14 полей независимо от своего расположения (7 по горизонтали и 7 по вертикали), т.е. всего полей, когда ладья бьет другую 64*14=896. Вероятность $P = \frac{64*14}{64*63} = \frac{2}{9}$.

б) Для двух королей общее число способов вычисляется также 64*63=4032. Но король бьет разное количество полей в зависимости от места, на котором стоит. Если король стоит в углу доски (4 места), он бьет 3 поля. Если он стоит у края доски, но не в углу (таких мест 24), он бьет 5 полей. И если он стоит не у края (36 мест), то он бьет 8 полей вокруг себя. Таким образом, всего 4*3+24*5+36*8=420 способов расстановки, когда король бьет другого.

$P = \frac{420}{64*63} = \frac{5}{48}$

Ответ: а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{5}{48}$.

№ 7

Надо послать 6 различных писем. Сколькими способами можно это сделать, если для передачи писем можно использовать трех курьеров, и каждое письмо можно дать любому из курьеров?

Решение: Любое письмо можно дать любому курьеру, следовательно, для доставки каждого письма есть три способа передачи. Если писем 6, то умножаем 3 саму на себя 6 раз. 3*3*3*3*3*3= 729 вариантов.

Ответ: 729

№ 8

Из колоды в 36 карт выбирают две карты. Какова вероятность того, что они окажутся разных мастей?

Решение: Выбираем любую карту, всего 4 масти по 9 карт. 4*(9:36) = 1

Теперь выбираем вторую карту: 36-1=35 карт осталось, из этих 35 еще 8 карт той же масти что у выбранной нами 1 карты, значит 35-8=27 и вероятность того, что попадется другая масть $\frac{27}{35}$.

Ответ: $\frac{27}{35}$

№ 9

На полке стоит 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них? (стопка может состоять и из одной книги).

Решение: Разберем все возможные варианты количества книг в стопке:

1. 1 книга в стопке: 1*5=5 способов
2. 2 книги в стопке: 5*4=20 способов (первую книгу выбираем из 5, вторую из 4 оставшихся)
3. 3 книги в стопке: 5*4*3= 60 способов
4. 4 книги в стопке: 5*4*3*2=120 способов
5. 5 книг в стопке: 5*4*3*2*1=120 способов

Осталось сложить все способы: 5+20+60+120+120=325 способов.

Ответ: 325 способов

№ 10

Сколькими способами можно поставить 8 одинаковых ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Решение: Ладья на первой горизонтали может занимать 8 разных положений. Если это положение фиксировано, то ладья на второй горизонтали может занимать уже только 7 положений. Аналогично для ладьи на третьей горизонтали остается 6 вариантов и т. д. Итого $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8!$ способов.

Ответ: 8!

№ 11

Чемпионат по шахматам проводится в один круг. Сколько играется партий, если в чемпионате участвует 18 шахматистов?

Решение: Каждый игрок будет играть с оставшимися 17 игроками, т.е. все игроки будут играть 18*17 раз. Т.к. в каждой игре участвует двое, то всего будет 18*17:2=153 партии.

Ответ: 153

№ 12

Игральный кубик бросают шесть раз. Какова вероятность того, что единица выпадает не менее пяти раз?

Решение: Вероятность того, что при одном броске выпадет 1, равна $\frac{1}{6}$, вероятность того, что 1 не выпадет, равна $\frac{5}{6}$.

Вероятность выпадения единицы шесть раз $P(6)=\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6^6}$

Вероятность выпадения единицы пять раз $P(5)= 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6^5}$

Вероятность выпадения единицы не менее пяти раз $P(5\text{-}6)= P(5)+P(6)=\frac{1}{6^6} + \frac{5}{6^5} = \frac{31}{6^6}$

Ответ: $\frac{31}{6^6}$

№ 13

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга: а) Две белые ладьи; б) два белых короля; в) два белых слона; г)Два белых коня ; д) два белых ферзя?

Решение: а)две ладьи

Из задачи 39 мы понимаем, что первую ладью мы можем поставить на любое из 64 полей доски, при этом она бьет 14 полей, на 15 стоит сама, т.е. для второй ладьи остается 49 не битых полей: 64*49:2=1568 (делим на 2 так как фигуры одного цвета.)

б) два короля

Снова из задачи 39 мы знаем, что король бьет разное количество полей в зависимости от своего места. Если король стоит в углу (4 места), то он бьет три поля и четвертое занимает сам, для второго короля остается 60 небитых полей. Рассуждая дальше аналогичным образом, находим: (4*60+24*58+36*55):2=1806 способов; делим на два так как фигуры одного цвета

в) два слона

Слон также бьет разное количество полей в зависимости от местоположения. Если он стоит у края доски (28 мест), он бьет 7 полей, не битыми остаются 56 полей. Если он стоит на второй от края линии (20 мест), он бьет 9 полей, не битыми остается 54 поля. Если он стоит на третьей от края линии (12 мест), он бьет 11 полей и не битыми остаются 52 поля. И если слон стоит в центре поля (4 клетки), не битыми остаются 50 полей. Найдем общее количество способов: (28*56+20*54+12*52+4*50):2=1736 способов

г) Кони тоже бью разное количество полей в зависимости от положения (в углах, рядом с углом, на первой линии и в углу второй линии и т.д.). Подсчитав для каждого положения возможные варианты, получим (4*61+8*60+20*59+16*57+15*55):2=1848 способов

д) Для ферзя также придется посчитать количество небитых полей для разных положений (ферзь похож на слона и ладью одновременно). (28*42+20*40+12*38+4*36):2=1288.

Ответ: а) 1568 б) 1806 в) 1736 г) 1848 д) 1288

№ 14

У мамы есть 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она выдает по одному фрукту. Сколькими способами она может это сделать?

Решение: Число перестановок 9 фруктов в течение 9 дней = 9! Т.к. 2 яблока одинаковы, то делим это число на 2! Аналогично с 3 грушами и 4 апельсинами.

$\frac{9!}{2!\cdot 3!\cdot 4!}$= 1260 способов

Ответ: 1260

№ 15

Сколько слов можно составить из 5 букв А и не больше чем 3 буквы Б?

Решение: Рассмотрим сначала слова, состоящие только из букв А, такое слово 1.

Теперь рассмотрим слова, состоящие из 5 букв А и 1 буквы Б, эту букву мы можем поставить на любое из 6 мест в слове, т.е. таких слов 6

Слов, состоящих из 5 букв А и 2 букв Б : $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$

И слов, состоящих из 5 букв А и 3 букв Б : $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$

Всего: 1 + 6 + $\frac{7!}{5!\cdot 2!}$ + $\frac{8!}{5!\cdot 3!}$ =1+6+21+56= 84 слова.

Ответ: 84 слова.

№ 16

Из колоды в 36 карт последовательно выбирают две карты. Какова вероятность того, что вторая карта по достоинству больше первой?

Решение: Всего способов вытащить две карты из колоды: n = 36*35

Из них благоприятных способов:

Если первая карта 6 (их 4), то нас устроят любая из 32 карт старше 6, т.е. 4*32.

Если первая карта 7 (их 4), то нас устроят любая из 28 карт старше 7, т.е. 4*28.

Если первая карта 8 (их 4), то нас устроят любая из 24 карт старше 7, т.е. 4*24. И так далее. Получаем, что

m=4*(32+28+24+20+16+12+8+4)=576

Вероятность равна: P=$\frac{4*4*36}{36*35} = \frac{16}{35}$

Ответ: $\frac{16}{35}$

№ 17

Сколькими способами можно расставить на первой горизонтали шахматной доски комплект белых фигур (король, ферзь, две ладьи, два слона, два коня)?

Решение: Первая линия шахматной доски представляет собой 8 клеток, на которых и надо расположить эти 8 фигур. Различные варианты расположения будут отличаться только порядком фигур, значит, это будут перестановки с повторениями P8 (2,2,2) (ладьи, слоны и кони).

P8(2,2,2)=$\frac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2} = 7! = 5040$

Ответ: 5040 способов.

№ 18

Сколько существует десятизначных чисел, в записи которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

Решение: Найдем количество десятизначных чисел, в которых все цифры разные. На первом месте в таком числе может стоять любая из 9 отличных от нуля цифр, на втором – любая из 9 цифр, отличных от первой, для третьей цифры остается уже 8 вариантов и т. д. Всего получаем $9\cdot 9!$ чисел. Осталось вычесть это количество из количества $9\cdot 10^9$ всех десятизначных чисел.

Ответ: $9\cdot 10^9 - 9\cdot 9!$ чисел.

№ 19

Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

Решение: Подсчитаем количество чисел, в записи которых нет единицы. На первом месте может стоять любая из 8 цифр (не 0 и не 1), на каждом из остальных – любая из 9 цифр, отличных от 1. Всего получаем $8 \cdot 9^6=4251528$ чисел, что составляет меньше половины от количества $9 \cdot 10^6=9000000$ всех семизначных чисел

Ответ: больше чисел, в которых есть единица.

№ 20

Сколькими способами можно разбить 14 человек на пары?

Решение: Возьмём одного из 14 человек. Для него есть 13 разных человек, то есть 13 способов составить пару. Идём дальше: чтобы составить пару следующему человеку можно воспользоваться уже 11 способами и так далее будет уменьшаться количество способов на 2, пока не закончатся «свободные люди». Следовательно подсчитаем количество:

13*11*9*7*5*3*1=135135 способов.

Ответ: 135135 способов.

№ 21

Наугад выписывают девятизначное число. Какова вероятность того, что сумма его цифр четна?

Решение: Если мы рассмотрим последовательно девятизначные числа, мы увидим, что сумма цифр у них будет чередоваться: 100000000 – сумма нечетная, 100000001 – сумма четная и т.д. При переходе через разряд не происходит изменения четности суммы цифр, т.е. идут подряд два числа с нечетной суммой, при следующем переходе через разряд два числа с четной суммой. Таким образом количество чисел с чётной суммой цифр равно количеству с нечетной суммой цифр. Из этого следует, что вероятность выпадения заветного числа равна 50%(1/2).

Ответ: $\frac{1}{2}$.

§3. Числа C_n^k.

Перейдём теперь к изучению одного очень важного комбинаторного объекта. Начнём с задачи.

Задача 1.

Из класса, в котором учится 30 человек, нужно выбрать двоих для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго – независимо от выбора первого ученика, 29 способами. При этом каждая пара учитывается дважды. Поэтому ответ: $\frac{30\cdot29}{2} = 435$ *способов*. Заметим, что мы практически дословно повторили решение задачи 26.

Предположим теперь, что нам нужно выбрать для участия в математической олимпиаде команду не из двух человек, а из k и в классе учится не 30 человек, а n. Количество способов, которыми это можно сделать, называется числом сочетаний из n элементов по k и обозначается $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{k}$ (читается «С из k по n»). Например, $C_2^1 = 2$, $C_3^2 = 3$, $C_n^1 = n$, $C_n^n = 1$. Заметим, что при таком определении записи C_n^0 также придаётся содержательный смысл – есть только один способ не выбрать никого (выбрать 0) из n человек, т.е. $C_n^0 = 1$ для всех n. Интересно, что некоторые свойства этих чисел сочетаний можно легко доказать при помощи простых комбинаторных рассуждений, не использующих формулу для вычисления $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{k}$.

Свойство 1. $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{k} = \mathrm{C}_\mathrm{n}^{\mathrm{n-k}}$.

Доказательство. Заметим, что выбор участников олимпиады равносилен выбору учеников, не участвующих в олимпиаде. Поэтому число способов, которыми можно выбрать k человек из n, равно числу способов, которыми можно выбрать $n-k$ человек из n, то есть, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Свойство 2. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Доказательство. Количество всех команд численностью k, которые можно выбрать в этом классе (где n учеников) равно C_n^k. Разобьём все такие команды на две группы по следующему признаку. Зафиксируем какого-нибудь ученика класса (обозначим его А) и в первую группу команд отнесём все команды, в которые А входит, во вторую – те, в которые А не входит. Число команд в первой группе равно C_{n-1}^{k-1} (чтобы получить такую команду, нужно дополнить ученика А ещё $k-1$ учениками, выбрав их из $n-1$ оставшихся). Число команд во второй группе равно C_{n-1}^k (теперь из оставшихся $n-1$ надо выбрать полную команду численностью k). Поэтому $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Найдём теперь формулу для вычисления C_n^k

Задача 2.

Сколькими способами можно выбрать трёх школьников из класса, в котором учится 30 человек?

Решение:

Первого ученика можно выбрать 30 способами, второго- 29, третьего- 28. Таким образом, получаем $30 \cdot 29 \cdot 28$ вариантов выбора. Однако каждая команда при этом подсчёте учтена несколько раз: одна и та же тройка школьников может быть выбрана по-разному, например, сначала А, потом В, потом С, или сначала С, потом А, потом В и т.д. Поскольку число перестановок из трёх элементов равно 3!, то каждая команда учтена нами ровно 3! раз. Поэтому $C_{30}^3 = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!}$.

Совершенно аналогично может быть получена формула для вычисления C_n^k при произвольных n и k: $C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Разберём несколько задач.

Задача 3.

Сколькими способами можно выбрать 4 краски из имеющихся 7 различных?

Ответ: C_7^4

Задача 4.

У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого – 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Решение:

Первый школьник может выбрать три книги C_6^3 способами, а второй – C_8^3 способами. Таким образом, число возможных обменов равно $C_6^3 \cdot C_8^3 = \frac{4\cdot5\cdot6}{3!} \cdot \frac{6\cdot7\cdot8}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 1120$.

Задача 5.

В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырёх человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

В команду входит либо одна девочка, либо две. Разберём оба случая. Если в команде две девочки, то двух мальчиков к ним можно добавить C_7^2 способами. Если же в команду входит только одна девочка (её можно выбрать двумя способами), то команду можно дополнить тремя мальчиками C_7^3 различными способами. Таким образом, общее число возможных команд равно $C_7^2 + C_7^3 = \frac{6\cdot7}{2!} + \frac{2\cdot5\cdot6\cdot7}{3!} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 \cdot 7 = 91$

Задача 6.

Сколькими способами можно разбить 10 человек на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

Решение:

Первую команду можно выбрать C_{10}^5 способами. Этот выбор полностью определяет вторую команду. Однако при таком подсчёте каждая пара команд

А и В учитывается дважды: один раз, когда в качестве первой команды выбирается команда А, и второй- когда в качестве первой выбирается команда В. Таким образом, ответ: $\frac{C_{10}^{5}}{2} = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9}{2\cdot3\cdot4} = \frac{6\cdot7\cdot9}{3} = 2\cdot7\cdot9 = 126$.

Задача 7.

Из колоды в 36 карт выбирают 4 карты. Какова вероятность того, что все они окажутся тузами?

Ответ:$\frac{1}{C_{36}^{4}}$

Заметим, что из полученной выше формулы для вычисления C_n^k совершенно не очевидно уже доказанное нами первое свойство $C_n^k = C_n^{n-k}$. Однако формуле можно придать более симметричный вид, домножив числитель и знаменатель на $(n-k)!$:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cdot(n-k)!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot1}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$$

Теперь первое свойство очевидно.

Задачи § 3 для самостоятельного решения

№ 22

На плоскости отмечены 10 точек, причем никакие 3 не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Решение: Так как никакие 3 точки не лежат на одной прямой, то любые 3 из 10 точек определяют треугольник. Найдем количество «троек» точек: $C_{10}^{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{6} = 120$

Ответ: 120 треугольников.

№ 23

Из колоды в 36 карт выбирают 3 карты. Какова вероятность того, что все они пиковой масти?

Решение: Всего способов выбрать 3 карты из 36 - C_{36}^{3} . Пик в колоде 9 карт, выбрать из них 3 пики можно C_{9}^{3} способами. Р= $\frac{C_9^3}{C_{36}^3} = \frac{9\cdot8\cdot7}{3!} : \frac{36\cdot35\cdot34}{3!} = \frac{9\cdot8\cdot7\cdot3}{36\cdot35\cdot34\cdot3}$ $= \frac{1}{85}$

Ответ: $\frac{1}{85}$

№ 24

Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, 2 сержантов и 20 рядовых?

Решение: Одного офицера из 3 можно выбрать тремя способами; двух сержантов C_{60}^{20} способов. Всего получается $3\cdot C_6^2 \cdot C_{60}^{20} = 3\cdot\frac{6\cdot5}{2!} \cdot \frac{60\cdot59\ldots\cdot41}{20!} =$ $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot60\cdot59\cdot58\cdot57\cdot56\cdot55\cdot54\cdot53\cdot52\cdot51\cdot50\cdot49\cdot48\cdot47\cdot46\cdot45\cdot44\cdot43\cdot42\cdot41}{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 3^6\cdot5\cdot59\cdot29\cdot56\cdot11\cdot 53\cdot5\cdot7\cdot47\cdot23\cdot43\cdot41$ =1, $3582\cdot10^{19}$ способами.

Ответ: $45\cdot C_{60}^{20}$

№ 25

В классе, в котором учатся Петя и Вася, 31 человек. Сколькими способами можно выделить из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Вася не входили в команду одновременно?

Решение: Пусть в команду входит Петя, тогда исключим Васю и из оставшихся 29 человек наберем 10 недостающих в команду. То есть C_{29}^{10}. Аналогично с Васей. Также надо учесть случаи, когда в команду не входят ни Петя, ни Вася: C_{29}^{11}. То есть всего способов: $= C_{29}^{10} + C_{29}^{10} + C_{29}^{11} = \frac{2\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} + \frac{29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21\cdot20\cdot19}{11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} =$ $29\cdot26\cdot5\cdot23\cdot22\cdot21+29\cdot26\cdot5\cdot23\cdot21\cdot19=29\cdot26\cdot5\cdot21\cdot(22+19)=74\ 657\ 310$

Ответ: 74 657 310 способов.

№ 26

Монету подбрасывают 10 раз подряд. Какова вероятность того, что выпадет 5 орлов?

Решение: 5 орлов из 10 монет - это 5 орлов и 5 решек. Вероятность выпадения орла при одном броске $\frac{1}{2}$; вероятность выпадения 5 орлов при пяти бросках $\left(\frac{1}{2}\right)^5$. Для решек аналогично. Теперь нам надо выбрать 5 бросков из 10, в которых выпадает орел: $P = C_{10}^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{32} = \frac{3\cdot2\cdot7\cdot6}{32\cdot32} = \frac{63}{256} \approx 0{,}246$

Ответ: 0, 246

№ 27

Сколькими способами можно переставить буквы слова «эпиграф» так, чтобы гласные шли в алфавитном порядке и согласные шли в алфавитном порядке?

Решение: Сначала упорядочим по алфавиту гласные (А,И,Э), теперь упорядочим согласные (Г,П,Р,Ф). Теперь не меняя порядка букв в каждой группе нужно составить все возможные «слова». Это будет число сочетаний либо гласных, либо согласных букв. $C_7^3 = \frac{7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3} = 35$. $C_7^4 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 35$

Ответ: 35

№ 28

Из колоды в 36 карт выбирают 10 карт. Какова вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз?

Решение: Если мы уберем тузы из колоды, то в ней останется 32 карты$\Rightarrow$ C_{36}^{10}

Тогда способы выбрать 10 карт без тузов:

$m = C_{36}^{10} - C_{32}^{10} = \frac{36 \cdot 35 \ldots \cdot 27}{10!} = \frac{32 \cdot 31 \ldots \cdot 23}{10!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27(36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 - 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23)}{10! 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} =$

$31 \cdot 29 \cdot 210984 = P = \frac{C_{36}^{10} - C_{32}^{10}}{C_{36}^{10}} = 1 - \frac{C_{32}^{10}}{C_{36}^{10}} = 1 - \frac{32 \cdot 31 \ldots \cdot 23 \cdot 10!}{10!} =$

$\frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 9 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{10! 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 1 - \frac{26 \cdot 5 \cdot 23}{9 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 11} = 1 - \frac{2990}{11781} \approx 1 - 0.25 \approx 0.75$

Ответ: 0.75

№ 29

Сколько существует шестизначных чисел , у которых по 3 четные и 3 нечетные цифры?

Решение: На первом месте может стоять одна из 9 чисел, кроме нуля. Из 5 оставшихся мест выбираем 2, C_5^2 на них мы ставим цифры той же четности ,что и первая, каждую из них можно выбрать пятью способами , то есть , всего 52 . На оставшиеся 3 места ставим цифры другой четности (всего 5^3 способов). Итого: 9$\cdot$ $C_5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^3 = \frac{9 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 90 \cdot 5^2$ = 281250 (способов)

Ответ: 281250 способов.

№ 30

На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой - 11 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Решение: Две вершины треугольников должны лежать на одной прямой, а третью на другой. Тогда, 10$\cdot$ C_{11}^2 - это число треугольников с одной вершиной на прямой с десятью точками. 11$\cdot$ C_{10}^2 - это одна вершина на прямой с одинадцатью точками. Всего, 10$\cdot$ $C_{11}^2 + 11 \cdot C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 10}{2} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{2}$ = 550+495= 1045 (треугольников)

Ответ: 1045 треугольников.

№ 31

Имеется 15 человек. Сколькими способами можно : а) разбить их на три команды по 5 человек в каждой ? б) выбрать из них две команды по 5 человек в каждой ?

Решение: а) C_{15}^{5} (1 команда) $\cdot$ C_{10}^{5} (2 команда), третью команду выбирать не придется, так как осталось 5 человек . Но при этом, каждая тройка команд учтена по несколько раз (3!). $\frac{C_{15}^{5}\cdot C_{10}^{5}}{3!}=\frac{7\cdot3\cdot13\cdot11\cdot3\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=126126$

б) Аналогично, первую команду выбираем C_{15}^{5} способами, вторую C_{15}^{5} способами, каждая пара команд учтена дважды относительно порядка выбора

$\frac{C_{15}^{5}\cdot C_{10}^{5}}{2}=126126\cdot3=378378$

Ответ: а) 126126; б) 378378

№ 32

На шахматную доску произвольным образом ставят три белые пешки. С какой вероятностью они окажутся на одной горизонтали?

Решение: Всего на шахматной доске 64 клетки. Число способов выбрать 3 клетки из 64 C_{64}^{3} горизонталей на шахматной доске 8, следовательно, C_{8}^{3} - это подходящие положения на каждой горизонтали.

$C_{64}^{3}=\frac{64\cdot63\cdot62}{3\cdot2\cdot1}=64\cdot21\cdot31$; $C_{8}^{3}=\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=8\cdot7$; $P=\frac{8\cdot C_{8}^{3}}{C_{64}^{3}}=\frac{8\cdot8\cdot7}{64\cdot21\cdot31}=\frac{1}{93}$

Ответ: $\frac{1}{93}$

№ 33

Сколько существует десятизначных чисел, сумма цифр которых равна 4?

Решение: Представим 4 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых.

когда есть 4 и 9 нулей: 4+000000000 – 1 число (4 может стоять только на первом месте)

3,1,00000000: на первом месте может стоять либо 1 либо 3: – 2 случая. Вторая не нулевая цифра может стоять на любом из 9 чисел, следовательно, $2\cdot9=18$ чисел.

2,2,00000000: на первом месте одна из двоек, вторая на одном из оставшихся мест, порядок двоек не важен - 9 чисел

4) 2,1,1,0000000: Первое место занято ненулевой цифрой, размещение 7 нулей по 9 местам $C_9^7 = C_9^2 \quad \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1}$=36 способов. В каждом таком размещении есть 3 варианта расстановки на оставшиеся 3 места двойки и двух единиц (2,1,1; 1,2,1; 1,1,2)   36·3=108 чисел

5) 1,1,1,1,000000. На первом месте стоит одна из единиц, остальные 3 единицы расставим по 9 местам, порядок единиц не важен $C_9^3 = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1}$=84 числа.

Посчитаем итог по всем 5 случаям: 1+18+9+108+84=220 чисел

Ответ: 220 чисел

№ 34

Человек имеет 6 друзей и в течение 5 дней приглашает к себе в гости троих из них, так, чтобы компания ни разу не повторялась. Сколькими способами он может это сделать?

Решение: В первый день он может позвать $C_6^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}$ =20 способов. Во второй день он уже не сможет пригласить ту компанию, которую приглашал вчера, следовательно, во 2 день - 19 способов, в 3 день - 18 способов, в 4 день - 17 способов, в 5 день - 16 способов.

Всё количество способов 20·19·18·17·16= 1860480

Ответ: 1860480 способов

№ 35

Колоду из 36 карт случайным образом делят пополам. Какова вероятность того, что в каждой пачке будет по два туза.

Решение: Число способов разделить колоду на 2 равные пачки C_{32}^{16}. Из них нам подходят способы, где в одну пачку мы выбрали 2 туза из 4, то есть C_4^2 и 16 не тузов из оставшихся 32 карт$\Rightarrow C_{32}^{16}$

$$P=\frac{C_4^2 \cdot C_{32}^{16}}{C_{36}^{18}} = \frac{4\cdot 3\cdot 32\ldots\cdot 17\cdot 18\ldots\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 16\ldots\cdot 1\cdot 36\ldots\cdot 19} = \frac{4\cdot 3\cdot 18\cdot 17\cdot 18\cdot 17}{2\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33} = \frac{9\cdot 17}{35\cdot 11} = 0{,}3974 \approx 0{,}4$$

Ответ: 0,4

№ 36

Как известно, для участия в лотерее «Спортлото» нужно указать 6 номеров из имеющихся в карточке 45-и. Ваня заполнил одну карточку. Какова вероятность того, что он угадает: А) все шесть номеров? Б) ровно три номера?

Решение: А) Всего способов заполнить карточку C_{45}^{6}, из них выигрышный только один, таким образом Р=$\frac{1}{C_{45}^{6}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40} = \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 43 \cdot 7 \cdot 41 \cdot 20} = \frac{1}{8145060}$

Б) Способов угадать ровно три номера: выбрать 3 из 6 выигрышных номеров C_6^3 и выбрать 3 из 39 невыигрышных номеров C_{39}^3 ⇒ т.е. $C_6^3 \cdot C_{39}^3$. ⇒ Р = $\frac{C_6^3 \cdot C_{39}^3}{C_{45}^6} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40} = \frac{3 \cdot 19 \cdot 37}{11 \cdot 43 \cdot 21 \cdot 41} = \frac{9139}{407253} \approx 0{,}022$

Ответ: А) вероятность того что Ваня угадает все шесть номеров $\frac{1}{8145060}$

Б)-вероятность того что Ваня ровно три номера ≈ 0,022

§4. Треугольник Паскаля.

В этом параграфе не излагаются новые методы решения задач, однако соединение изложенных ранее идей приводит к некоторым красивым комбинаторным фактам.

Для начала предположим, что мы знаем все числа C_n^k для некоторого фиксированного n. Тогда второе свойство, которое здесь удобно переписать в виде $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$, позволяет легко вычислить числа C_{n+1}^k для всех k. Это соображение приводит к следующему построению.

Поскольку C_0^0=1, напишем в первой строке 1. В следующей строке запишем значения C_1^0 и C_1^1 (каждое из них равно 1) так, чтобы значение C_0^0 оказалось над промежутком между двумя этими числами (рис.3).

1
1 1
Рис.3

1
1 1
1 1
Рис.4

1
1 1
1 2 1
Рис.5

Числа C_2^0 и C_2^2 также равны единице. Их мы запишем в следующей строке (рис.4), а между запишем следующее числоC_2^1, равное по второму свойству $C_1^0 + C_1^1$ (рис.5). Таким образом, число C_2^1 равно сумме чисел предыдущей строки, стоящих слева и справа от него.

По тому же правилу заполняем все предыдущие строки. Сначала по бокам пишем значение C_n^0 и C_n^n для очередного n (они всегда равны 1). затем между каждыми двумя числами предыдущей строки записываем их сумму. В результате получаем числовой треугольник, изображённый на рис. 6. Он называется треугольником Паскаля.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Рис.6

Задачи § 4 для самостоятельного решения

№ 37

Лестница состоит из 7 ступенек, не считая верхней и нижней площадок. Спускаясь, можно перепрыгивать через некоторые ступеньки (можно даже через все 7). Сколькими способами можно спуститься по этой лестнице?

Решение: Каждую из 7 ступенек можно или перепрыгнуть, или наступить на нее. Т.е. получаем упорядоченную последовательность длиной 7, состоящую из «наступить» и «перепрыгнуть». По свойству треугольника Паскаля таких последовательностей $2^7 = 128$.

Ответ: 128 способов.

№ 38

Докажите, что из n предметов четное число предметов можно выбрать 2n-1 способами.

Доказательство: Всего способов выбора из n предметов множеств с любым числом предметов 2^n. Т.к. сумма чисел, стоящих на четных местах в n-й строке треугольника Паскаля, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах той же строки, следовательно, на четные числа приходится половина от всех способов, которые можно выбрать $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$, ч.т.д.

№ 39

Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$

Доказательство Сумма чисел, стоящих на четных местах в n-й строке треугольника Паскаля, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах той же строки, из чего следует, что $C_n^0 + C_n^2 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots$ Разность этих чисел будет равняться 0, ч.т.д.

§ 5. Шары и перегородки

Начнём этот параграф с обсуждения двух интересных задач. Обе эти задачи можно решить прямым технически трудным подсчётом (попробуйте!). Вместе с тем переформулировка условия позволяет легко получить ответ, который в обоих случаях, как вы, может быть, уже догадались, имеет вид C_n^k.

Задача 1. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Решение. Выложим шары в ряд. Для данного расклада наших шаров по шести ящикам раздели ряд пятью перегородками на шесть групп: первая группа – для первого ящика, вторая – для второго и т.д. Таким образом, число разложений шаров по ящикам равно числу способов разложения пяти перегородок. Перегородки могут стоять на любом из 19 мест (между 20 шарами – 19 промежутков). Поэтому число их возможных расположений равно C_{19}^{5} .

Упражнение. Сколькими способами можно разложить n одинаковых шаров по k пронумерованным ящикам так, чтобы ни один ящик не оказался пустым?

Задача 2. Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)?

Решение. Рассмотрим ряд из 25 предметов: 20 одинаковых шаров и 5 одинаковых перегородок, расположенных в произвольном порядке. Каждый такой ряд однозначно соответствует некоторому способу разложения шаров по ящикам: в первый ящик попадают шары, расположенные левее первой перегородки, во второй – расположенные между первой и второй перегородками и т.д. (между какими-то перегородками шаров может и не быть). Поэтому число способов разложения шаров по ящикам равно числу различных рядов из 20 шаров и 5 перегородок, т.е. C_{25}^{5} (ряд определяется теми 5-ю местами из 25, на которых стоят перегородки).

Отметим, что другое решение задачи 86 можно получить так: положим сначала в каждый ящик по одному шару (теперь наверняка не будет пустых ящиков), а затем воспользуемся результатом задачи 87. Найденные при решении двух предыдущих задач идеи позволяют изящно решить следующую трудную задачу.

Задача 3. Сколькими способами натуральное число можно представить в виде суммы:

k натуральных слагаемых;

k неотрицательных целых слагаемых (представления, различающиеся порядком слагаемых, считаются различными)?

Указание. Представим n в виде суммы $n = 1 + 1 + \ldots + 1$. Назовём теперь эти n единиц «шарами», а k слагаемых из условия задачи – «ящиками».

Ответ. а) C_{n-1}^{k-1} ; b) C_{n+k-1}^{k-1}.

Задачи § 5 для самостоятельного решения

№ 40

Сколькими способами 12 пятаков можно разложить по 5 различным кошелькам так, чтобы ни один кошелек не оказался пустым?

Решение: Назовем пятаки «шарами», а кошельки «ящиками». Кошельков 5, значит перегородок 4. Следовательно, количество расположений равно $C_{11}^{4} = \frac{11\cdot10\cdot9\cdot8}{4!} = 330$

Ответ: 330 способов.

№ 41

Сколькими способами можно разрезать ожерелье, состоящее из 30 попарно различных бусин, на 8 частей (резать можно только между бусинами)?

Решение: Первый разрез можно сделать в 30 местах, второй - в 29, и так далее пока для последнего 8-ого разреза не останется 23 места. Следовательно количество способов равно $C_{30}^{8} = \frac{30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23}{8!}$ =5852925

Ответ: 5852925 способами.

№ 42

60 игральных кубиков бросают одновременно. Какова вероятность того, что 1,2,3,4,5,6 выпадут по десять раз?

Решение: Будем считать, что 60 кубиков – это шары, каждый из которых попадает в один из 6 пронумерованных ящиков, если на кубике выпало 1, то он попал в 1 ящик, если 2 – то во второй и т.д. Тогда мы можем найти количество способов распределения 60 кубиков по 6 ящикам, это равно C_{65}^{5} (т.к. некоторые ящики могут оставаться пустыми) Это все возможные способы. Нас же устроит только один случай, когда в каждый ящик попало

10 кубиков. Значит, вероятность равна $P = \frac{1}{C_{65}^5} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{65\cdot64\cdot63\cdot62\cdot61} = \frac{1}{8259888} \approx$ 0,00000012

Ответ: $\frac{1}{C_{65}^5} \approx$ 0,00000012

№ 43

В почтовом отделении продаются открытки 10 видов. Сколькими способами можно купить в нем: а) 12 открыток; б) 8 открыток? в) 8 различных открыток?

Решение: а) 10 видов представим ящиками, а 12 открыток - шариками. Если 10 ящиков, то перегородок будет 9, а предметов всего 12+9=21 (ящик может быть пустым, т.е. какого-то вида открытку можно не брать). Следовательно, количество способов равно $C_{21}^9 = \frac{21\cdot20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13}{9!}$ =293930

б) Аналогично предыдущему решению, только предметов всего 8+9=17. Следовательно, количество способов равно $C_{17}^9 = \frac{17\cdot16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{9!}$ =24310

в) В этом случае вид открыток не может повторяться, следовательно количество способов равно $C_{10}^8 = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{8!}$ =45 способов. Иначе, если мы выбираем 8 различных открыток из 10 видов, значит, 2 открытки останутся не выбранными, их можно определить $C_{10}^2 = \frac{10\cdot9}{2} = 45$.

Ответ: а)293930 способ; б)24310 способов; в) 45 способов

№ 44

В кошельке лежит по 20 монет достоинством в 10, 15 и 20 копеек. Сколькими способами можно из этих 60 монет выбрать двадцать?

Решение: Сведем задачу к шарам и перегородкам. 20 монет – это 20 шаров, 3 вида монет – это ящики, ящики могут быть пустыми, если монет какого-то номинала не выбрали (монет даже одного номинала хватит, чтобы выбрать 20 монет). Тогда число способов выбрать 20 монет равно $C_{n+k-1}^{k-1} = C_{20+3-1}^{3-1} = C_{22}^2 = 231$

Ответ: 231

№ 45

Поезду, в котором находится m пассажиров, предстоит сделать n остановок. а) Сколькими способами могут выйти пассажиры на этих остановках? б) Решите ту же задачу, если учитывается лишь количество пассажиров, вышедших на каждой остановке.

Решение:

а) Заменив пассажиров шарами , а остановки – ящиками, получим задачу, похожую на задачу 86. Отсюда: количество пассажиров выходящих на каждой остановке можно определить по формуле: n^m

б) Если учитывается только количество пассажиров, вышедших на каждой остановке, то задача становится аналогичной задаче про шары и ящики, где ящики могут оставаться пустыми (т.е. на остановке никто не выходит). m пассажиров – шары, n остановок – ящики. C_{n+m-1}^{n-1}

Ответ: а) n^m; б) C_{n+m-1}^{n-1}

6. ЛИНЕЙНЫЕ И КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

Введение

В предлагаемом задании речь пойдет о линейной функции и ее ближайших «родственниках» кусочно-линейных функциях.

В процессе работы над заданием вам помогут встретиться термины и обозначения, с которыми вы на уроках математики почему-либо не встречались, но которые активно используется в математической литературе. Поэтому здесь мы введем их и поясним на примерах.

В самом общем виде уравнение с одной переменной может быть записано в виде f(x)=g(x), а неравенство с одной переменной – в виде f(x)≥g(x), где x – переменная, принимающая свои значения в множестве действительных чисел.

Решая уравнения (или неравенство) , мы его преобразуем таким образом, чтобы получить более простое уравнение (или неравенство), решения которого либо определяются непосредственно, либо находятся уже известным нам способом. Желательно эти преобразования проводить так, чтобы на каждом шаге преобразованное уравнение (неравенство) имело те же самые корни, что и исходное, т.е, было равносильно данному уравнению (неравенству). Напомним, что два уравнения f1(x)=g1(x) и f2(x)=g2(x) называются равносильными, если совпадут множества их решения. При этом пишут f1(x)=g1(x)↔f2(x)=g2(x). (Если оба уравнения не имеют решений, то они также считаются равносильными).

Иногда нам приходится одновременно решать не одно, а несколько уравнений и неравенств, При этом возможно два случая:

1. Нас могут интересовать те значения переменных, которые являются решениями каждого из уравнения (неравенств). В этом случае мы говорим, что надо решить систему уравнений. Система двух уравнений записывается следующим образом: $\begin{cases} f1(x) = g1(x) \\ f2(x) = f2(x) \end{cases}$

Фигурная скобка соответствует союзу «и» и означает, что мы должны найти такие значения переменной x, которые обращают в верное числовой равенство одновременно и первое и второе уравнение.

2. Нас могут интересовать те значения переменных, которые являются решениям хотя бы одно из уравнений (неравенств). В этом случае мы говорим, что нам надо решить совокупность уравнений (неравенств). Совокупность двух уравнений записывается одним из двух следующих способов. Либо так: $\left[\begin{array}{l} f1(x) = g1(x) \\ f2(x) = f2(x) \end{array}\right.$, либо так ((f1(x)=g1(x) или f2(x)=g2(x)).

Скобка «[«, соответствует союзу «или» и означает, что мы должны найти такие значения переменной x, которые обращают в верное числовое равенство хотя бы одно из уравнений.

Знак «[«, соединяющий уравнения (неравенства), означает, что множество их решений следует объединить, в то время как знак «{« требует искать оба решения уравнений (неравенств).

Пусть, например, требуется решить уравнение $\frac{f(x)}{g(x)}$=0. Используя условие равенства дроби нулю, мы приходим к заключению, что данное уравнение равносильно смешанной системе $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$, т.е. $\frac{f(x)}{g(x)}$=0↔ $\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.

Неравенство f(x)*g(x)>0 можно заменить равносильно совокупностью двух систем, что можно записать следующим образом:

f(x)*g(x)>0 ↔ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ либо так:

f(x)*g(x)>0↔ $\left(\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \right)$.

(Так как произведение двух множителей положительно тогда и только тогда, когда или оба множителя одновременно положительные или оба одновременно отрицательные).

Линейная функция

Пусть К - множество всех действительных чисел. Напомним что линейнойфункцией называется функция, которая для любого x из К задается формулой y=kx +b, где k и – действительные числа.

График линейной функции есть прямая, пересекающая ось ординат в точке с координатами (0;b), а ось абсцисс в точке $\left(-\frac{b}{k};0\right)$, если k≠0, и параллельная оси абсцисс, если k≠0.

Справедливо и обратное утверждение: каждая прямая в координатной плоскости, пересекающая ось ординат, является графиком линейной функции.

Число k характеризует величину угла наклона графика функции к оси OX и называется угловым коэффициентом прямой.

Прямые, параллельные оси ординат задаются уравнением вида x = a.

Для того чтобы задать прямую, достаточно указать на ней две различные точки A(x1; y1) и B(x2;y2) То, подставляя координаты точек A и B в уравнение y=kx + b, определим k и=b из системы $\begin{cases} y1 = kx1 + b \\ y2 = kx2 + b \end{cases}$. *Решив эту систему, получим*

$$k = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}, b\frac{y1x2 - y2x1}{x2 - x1} (\textit{при } x1 \neq x2).$$

Таким образом, искомая прямая есть график функции$y = \frac{y2-y1}{x2-x1}x + \frac{y1x2-y2x1}{x2-x1}$.

Если же x1=x2, то уравнение искомой прямой есть x=x1

Пусть теперь известно, что прямая проходит через точку A(2;-1) и параллельна прямой, заданной уравнение 3x -2x=4. Найдем уравнение этой прямой.

Очевидно, что прямая 3x-2x=4 есть график функции, заданной формулой $y = \frac{3x-4}{2}$ или y=1,5x-2. Так как искомая прямая параллельна данной, то их угловые коэффициенты одинаковы и равны 1,5. И для решения задачи осталось определить свободный член в формуле y=1,5x + b зная, что точка A(2;-1) принадлежит графику этой функции, т.е. решить уравнение -1=1,5*2 + b. Так как корень его b= -4, то искомая прямая есть график функции y=1,5x -4 или задается формулой 3x-2y =8.

1.1Задайте формулой линейную функцию, если известно, что ее график проходит через точки:

А) (2;0) и (-1;3); Б) (-2;-1) и(1;5); В)(-3;4) и (2;4) Г)(0;-3) и (2;3)

Ответ: а) y=-x+2, в)y=4.

1.2Задайте формулой линейную функцию, если известно что ее график проходит точку A(1;-2) параллелен:

А)Графику функции y=2x-11

Б) биссектрисе первого и третьего координатных углов;

В) Биссектрисе второго и четвертого координатных углов.

Ответ: б)y=-2, в)y=x-3

1.3Задайте формулой функцию, если известно, что ее график параллелен графику функции y=-0,2x+7 и проходит через точку пересечения графиков функций y=x-2 и y=-3x-5.

1.4Задайте формулой линейную функцию, если известно, что ее график параллелен графику y=-3x-4 и проходит через одну точку оси ординат с графиком функции y=-4x-5.

Ответ: y=-3x-5

Отметим что если точка A(x0;y0) принадлежит графику то точка A1(x0;-y) принадлежит графику функции, который симметричен данному относительно OX.

1.5Задайте формулой линейную функцию, график которой симметричен относительно оси абсцисс графику функции:

а)y=2x +3, б) y=3x-4, в)$y = -\frac{2}{3}x + 5$ г)y=-7x-1 д)y=3 е) y=-1 ж) y=0

Решение п.а).Так как точки (0;3) и (1;5) принадлежат графику данной функции, то график искомой функции проходит через точки (0;-3) и (1;-5).

Коэффициенты kи b найдем из системы $\begin{cases} -3 = k * 0 + b \\ -5 = K * 1 + b \end{cases}$или $\begin{cases} -3 = b \\ -5 = k - 3 \end{cases}$ откуда $\begin{cases} b = -3 \\ k = -2 \end{cases}$, следовательно, искомая функции есть y=-2x-3.

Ответ в)$y = \frac{2}{3}x - 5$д) y=-3

1.6Задайте формулой линейную функцию, график которой симметричен относительно оси ординат графику функции:

А)$y = \frac{2}{3}x - 4$, Б)$y = \frac{4}{3}x - 2$, В)y=-2x+1, Г)$y = -\frac{3}{4}x - 2$, Д)y=4, Е) y=-2 Ж)y=0

Указание: Вначале целесообразно выяснить, как связаны между собой координаты точек, симметричных относительно оси ординат.

Ответ: а) $y = -\frac{2}{5}x - 4$, г)$y = \frac{3}{4}x - 2$, е)y=-2.

1.7Задайте формулой линейную функцию, график который симметричен относительно начала координат графику функции:

А)y=x+2, Б)$y = \frac{4}{3}x - 2$, В)y=-2x+5, Г)y=-x-8, Д)$y = \frac{1}{3}$, Е)y=-3, Ж)y=0.

Указание: Вначале целесообразно, как связаны между собой координаты точек, симметричных относительно начала координат.

Ответ: а)y=x-2, в)y=-2x-5, д) $y = -\frac{1}{3}$, ж) y=0

Всякое уравнение, неравенство, система или совокупность уравнений или неравенств задает на координатной плоскости фигуру, состоящую из все точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, неравенству, системе, совокупности.

1.8Изобразите множество точек плоскости координаты которых удовлетворяют следующему соотношению:

А)xy=0, Б)$\frac{x+1}{y-2} = 2$, В) $x^2 - y^2 = 0$, Г) x^2-3x-4=0, д)x^2-4y^2=x +2y, е)$\begin{cases} 2x - y < 1 \\ x - 2y \geq 3 \end{cases}$,

Ж) y^2>y, З) $x^2 < y^2$.

Решение п.в). Так как $x^2 - y^2$=(x-y)(x+y),то исходное уравнение равносильно совокупности$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$. График первого уравнения совпадает с графиком функции y=x, второго с графиком функции y=-x следовательно, искомое множество есть множество точек, изображенное на рис.1

Ответ: а)оси координат, д) совокупность прямых, заданных уравнениями x+2y=0 и x-2y-1=0, Ж)множество точек координатной плоскости, у которых ордината меньше 0, либо больше 1.

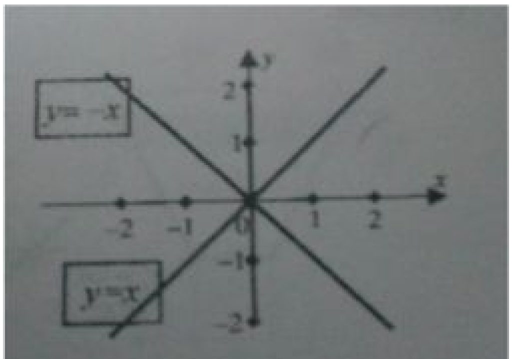


Рис.1

Кусочно-линейная функция

Функция, определенная на множестве X, называется кусочно-линейной, если множество X можно разбить на промежутки не нулевой длины, внутри каждого из которых эта функция линейна.

Функция y= $\begin{cases} 1. \text{если } x < -1 \\ -2x + 1, \text{если } -1 \le x < 0 \\ -1, \text{если } x \ge 0 \end{cases}$

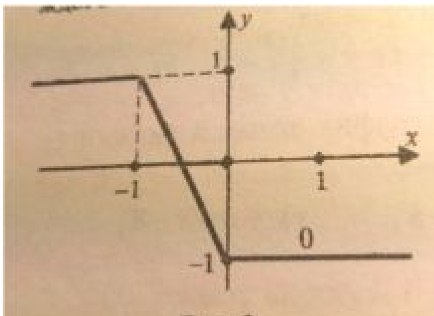


Рис.2

Очевидно, является кусочно-линейной функцией, так как на каждом из трех промежутков, составляющих ее область определения, функция задается формулой y=kx+b. График этой функции изображен на рис. 2.

2.2. На рисунке 3 изображены графики трех кусочно-линейных функций, определенных для любого x є R. Запишите аналитические выражения для этих функций.

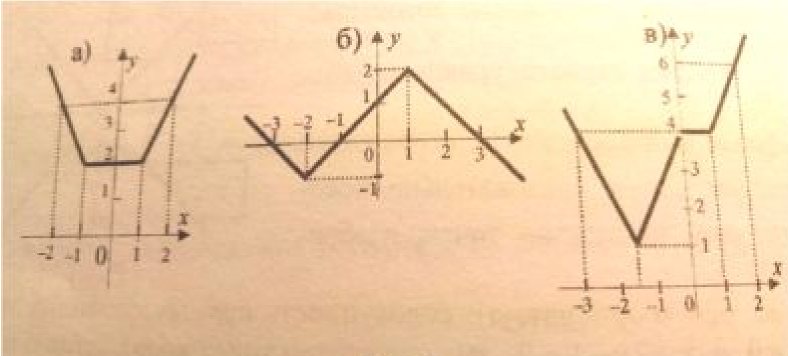


Рис.3

Решение п.2.2.б. На промежутке (-∞;-2] функция – линейная, следовательно, она задается формулой y=kx+b. Так как ее график проходит через точки (-3;0) и (-2;-1), то k и b находим из системы $\begin{cases} 0=-3k+b \\ -1=-2k+b \end{cases}$, решив которую, получаем k=-1 и b=-3. Следовательно, на (-∞;-2] функция задается формулой y=-x-3.

На промежутке (-2;1) функция линейна, и график ее проходит через точки (-1;0) и (0;1). Следовательно, $\begin{cases} 0=-1k+b \\ 1=0k+b \end{cases}$, откуда k=1, b=1, т.е. на (-2,1) функция задается формулой y=x+1.

На промежутке [1;+∞) функция линейна и график ее проходит через точки (1;2) и (3;0). Следовательно, $\begin{cases} 2=1k+b \\ 0=3k+b \end{cases}$, откуда k=-1, b=3, т.е. на [1;+∞) функция задается формулой y=-x+3.

Таким образом на рисунке з б изображен график функции

$Y=\begin{cases} -x-3, \text{если } x\le -2 \\ x+1, \text{если } -2<x<1 \\ -x+3, \text{если } x\ge 1 \end{cases}$

§3 Модуль числа

Модулем действительного числа a называется само число, если оно неотрицательно, и число –a, если a отрицательно. Модуль числа a обозначается символом |a|. Значит $|a|=\begin{cases} a, \text{если } a\ge 0 \\ -a, \text{если } a<0 \end{cases}$

Геометрически модуль числа есть расстояние от точки числовой оси до начала отсчета.

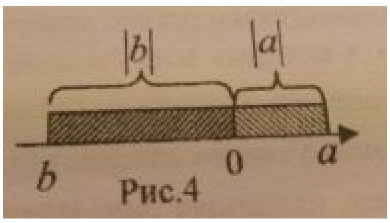


Рис.4

Непосредственно из определения следует, что:

1. |a|≥0

2. |a|≥a

3. |a|≥-a

4. |a|=|-a|

5. |a-b|=|b-a|

Докажите следующее свойство модуля:

|a+b|≤|a|+|b|

Решение: По свойствам 3и 2, -a≤|a|, -b≤|b|, и a≤|a|, b≤|b|. Почленно складывая эти пары неравенств, получаем –(a+b)≤|a|+|b| и a+b≤|a|+|b|. Так как по крайней мере одно из чисел a+b и –(a+b) равно |a+b|, то |a+b|≤|a|+|b|.

Пусть дано выражение f(x), определенное на множестве X, тогда |f(x)|={$f(x)$,для всех x є X,для которых $f(x)$≥0−$f(x)$,для всех x є X,для которых $f(x)$<0

Отсюда следует, что для того чтобы построить график функции y=|f(x)|, достаточно построить график функции y=f(x) и ту часть этого график, которая лежит ниже оси абсцисс, симметрично относительно оси абсцисс, отобразить вверх.

Отметим что для раскрытия знака модуля предварительно нужно выяснить, при каких x є X значения выражения f(x) неотрицательны, и при каких – отрицательны.

Рассмотрим выражение $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f_{,,}(x)|$, определенное на множестве X. Будем считать, что функции $f_{,}(x)$ обладают следующим свойством: множеством X можно разбить на промежутки ненулевой длины, на каждом из которых все $f_{,}(x)$ сохраняют свой знак. Для того что бы написать выражение, тождественно равное данному, но без знаков модуля, находят сначала все точки, в которых хотя бы одно из $f_{,}(x)$ меняет знак (если $f_{,}(x)$ – линейное выражение, то это корень уравнения $f_{,}(x)=0$) эти точки делят множество Xна промежутки, на каждом из которых каждое из выражений

$f_i(x)$ сохраняет свой знак. Затем, используя определение модуля, переходят от данного выражения к требуемому.

При преобразовании выражения, в котором под знаком модуля находится выражение, также содержащее модуль, обычно сначала освобождаются от внутренних модулей, а затем в полученном выражении раскрывают оставшиеся модули.

3.2. Запишите без знака модуля выражение:

$|3x-6|-|x+1|+|2x+4|$

Обсуждение п.в). Для того, чтобы записать выражение без знаков модуля, необходимо знать, какой знак имеет каждое из выражений: $3x-6$, $x+1$, $2x+4$. Но каково значение x, заранее не известно, поэтому необходимо разобрать несколько случаев.

Найдем значения переменной, при которых обращаются в нуль выражения $3x-6$, $x+1$, $2x+4$. Очевидно $x_1=2$, $x_2=-1$, $x_3=-2$. Отметим соответствующие точки на числовой оси. Они разбивают ее на четыре множества.

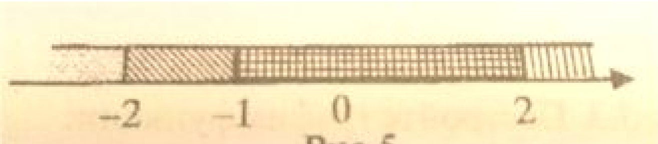


Рис.5

При этом на каждом из полученных множеств каждое из выражений имеет постоянный знак. Например, если точка находится в самой левой области ($x<-2$), то выражение $3x-6$ отрицательно, выражения $x+1$, $2x+4$, также отрицательны. Следовательно, $|3x-6|=-(3x-6)$, $|x+1|=-(x+1)$, $|2x+4|=-(2x+4)$. Таким образом, если $x<-2$, то $|3x-6|-|x+1|+|2x+4|=-3x+6+x+1-2x-4=-4x+3$.

Если $-2\le x<-1$, то $|3x-6|=-(3x-6)$, $|x+1|=-(x+1)$, $|2x+4|= 2x+4$. Следовательно, если $-2\le x<-1$, то $|3x-6|-|x+1|+|2x+4|= -3x+6+x+1+2x+4=11$

Если $-1 \le x <2$, то $|3x-6|=-(3x-6)$, $|x+1|= x+1$, $|2x+4|= 2x+4$. Следовательно, если $-1 \le x <2$, то $|3x-6|-|x+1|+|2x+4|= -3x+6-x-1+2x+4= -2x+9$.

Если $x\ge2$, то $|3x-6|= 3x-6$, $|x+1|= x+1$, $|2x+4|= 2x+4$. Значит, если $x\ge2$, то $|3x-6|-|x+1|+|2x+4|= 3x-6-x-1+2x+4= 4x-3$.

Окончательно получаем:

$$|3x-6|-|x+1|+|2x+4|=\begin{cases} \{-4x+3, \text{если } x<-2 \\ 11, \text{если } -2\le x<-1 \\ -2x+9, \text{если } -1\le x<2 \\ 4x-3, \text{если } x\ge 2 \end{cases}$$

Решение п.в). |3x-6|-|x+1|+|2x+4|=

$$\begin{cases} -3x+6+x+1-2x-4, \text{если } x<2 \\ -3x+6+x+1+2x+4, \text{если } -2\le x<-1 \\ -3x+6-x-1+2x+4, \text{если } -1\le x<2 \\ 3x-6-x-1+2x+4, \text{если } x\ge 2 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -4x+3, \text{если } x<-2 \\ 211, \text{если } -2\le x<-1 \\ -2x+9, \text{если } -1\le x<2 \\ 4x-3, \text{если } x\ge 2 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию y=|3x-6|-|x+1|+|2x+4|. Она определена для любого x из K̲. В силу задачи 3.2,в) она тождественно равна функции

$$y=\begin{cases} \{-4x+3, \text{если } x<-2 \\ 11, \text{если } -2\le x<-1 \\ -2x+9, \text{если } -1\le x<2 \\ 4x-3, \text{если } x\ge 2 \end{cases}$$ т.е. это кусочно-линейная функция.

3.3. Постройте график функции:

Y= ||x|-2|

Решение п.в).

$$||x|-2|=\begin{cases} |-x-2|, \text{если } x<0 \\ |x-2|, \text{если } x\ge 0 \end{cases}=\begin{cases} |x+2|, \text{если } x<0 \\ |x-2|, \text{если } x\ge 0 \end{cases}| =\begin{cases} -x-2, \text{если } x<-2 \\ x+2, \text{если } -2\le x<0 \\ -x+2, \text{если } 0\le x<2 \\ x-2, \text{если } x\ge 2 \end{cases}$$

Таким образом, график данной функции совпадает с графиком функции

$$y=\begin{cases} -x-2, \text{если } x<-2 \\ x+2, \text{если } -2\le x<0 \\ -x+2, \text{если } 0\le x<2 \\ x-2, \text{если } x\ge 2 \end{cases}-x$$, который изображен на рисунке 6.

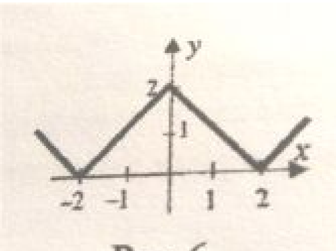


Рис.6

Геометрическая интерпретация модуля числа x как расстояния от точки x числовой оси до начала отсчета облегчает решение большого класса неравенств. Действительно, неравенству $|x|< a$ ($a>0$) удовлетворяют только те точки числовой оси, расстояние которых до начала отсчета меньше a, т.е. точки, лежащие между –a и a. Это означает, что x удовлетворяет системе неравенств {x>−ax<a, или, что то же самое, двойному неравенству $–a < x < a$.

Итак, $|x|< a \leftrightarrow \begin{cases} x > -a \\ x < a \end{cases} \leftrightarrow -a < x < a$.

По аналогичным соображениями решениями неравенства $|x|< a$ ($a>0$) служат значения x удовлетворяющие совокупности двух неравенств: $x < -a$ или $x > a$, т.е. $|x| > a \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -a \\ ax > a \end{array}\right.$ (рис.7б)

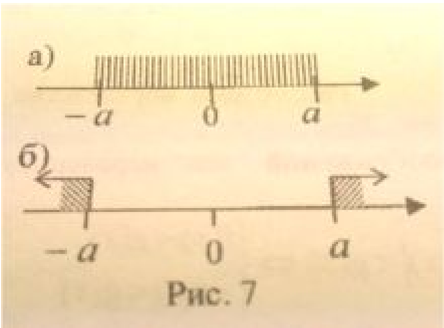


Рис. 7

Следует отметить, что при $a \le 0$ неравенство $|x| < a$ не имеет решений. Неравенству $|x| > a$ при $a < 0$ удовлетворяют все действительные числа, а при $a=0$ все, кроме $x=0$.

К неравенствам рассмотренного типа сводятся некоторые неравенства, не содержащие знаков модуля.

3.4. Решите неравенство: а) $4 < x^2 < 9$ б) $\sqrt{1−4x+4x^2} \le 2$.

Решение п.а). Заметим, что $x^2=|x|^2$. Поэтому данное неравенство равносильно следующему: $4 < |x|^2 < 9$. Поскольку число $|x|$ неотрицательно, его квадрат меньше 9 в том и только том случае, когда само это число меньше 3. Аналогично, $4 < |x|^2 \leftrightarrow 2 < |x|$. Таким образом, данное неравенство равносильно следующему: $2 < |x| < 3$. Последнему неравенству удовлетворяют те точки числовой оси, которые лежат по обе стороны от начала отсчета на расстоянии, большем 2 и меньшем 3 от него.

Ответ: (-3;-2)$\cup$(2;3).

Решение п.б) $\sqrt{1-4x+4x^2} \le 2 \leftrightarrow \sqrt{(1-2x)^2} \le 2 \leftrightarrow |1-2x| \le \leftrightarrow \begin{cases} 1-2x \le 2 \\ 1-2x \ge -2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 2x \\ 2x \le 3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} -0{,}5 \le x \\ x \le 1 \end{cases} \leftrightarrow 0{,}5 \le x \le 1{,}5$.

Ответ |-0,5;1,5|.

Рассмотрим неравенство вида |f(x)|<g(x). В силу приведенных выше соображений это неравенство равносильно системе $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$, т.е.

$|f(x)| < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ -f(x) < g(x) \end{cases}$

Для тех x, при которых g(x)≤0, эта система, а значит и данное неравенство, решений иметь не могут.

В частности, неравенство |f(x)|<a, где a∊R, при a≤0 решений не имеет, а при a>0 неравенство $|f(x)| < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a \\ -f(x) < a \end{cases}$

Однако в ряде случаев удобнее пользоваться следующими теоремами о равносильности:

$|f(x)| < g(x) \leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ -g(x) < f(x) \le g(x) \end{cases}$, (1)

Либо

$|f(x)| < g(x) \leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \ge 0 \\ f(x) \le g(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} (x) < 0 \\ -f(x) \le g(x) \end{cases} \right)$ (2)

Неравенство вида |f(x)|>g(x) равносильно совокупности двух неравенств f(x)>g(x) или f(x)<-g(x), т.е. $|f(x)| > g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ f(x) < -g(x) \end{cases}$.

Все те x, для которых g(x)<0 и x∊D(f) входят в множество решений данного неравенства и равносильной ему совокупности.

В частности, неравенство |f(x)|>a, где a∊R, равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ F(x) < -a \end{array} \right.$.

Если a<0, то неравенство |f(x)|>авыполняется при любом значении x, для которого выражение f(x) имеет смысл.

При решении данного неравенства можно пользоваться такими теоремами о равносильности:

$$|f(x)| \geq g(x) \leftrightarrow \left(\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \text{или } \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq -g(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} g(x) < 0 \\ x \epsilon D(f) \end{cases} \right), \quad (3)$$

Либо

$$|f(x)| \geq g(x) \leftrightarrow \left(\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) \geq g(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) \geq g(x) \end{cases} \right). \quad (4)$$

В каждом конкретном примере такого типа надо уметь выбрать наиболее рациональный путь. Например,

$$||x|-2| \leq x \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ |x| - 2 \leq x \\ |x| - 2 \geq -x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2 \leq x \\ x - 2 \geq \ -x \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 0 * x \leq 2 \\ 2x \geq 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \leftrightarrow x \geq 1.$$

Тот же ответ легко получить, используя графическое представление. В одной системе координат строим графики функций y=||x|-2| и y=x (рис.9). График первой функции изображен на рис. 6. Абсциссы точек, для которых этот график расположен не выше графика второй функции, заполняют промежуток [1; +∞), следовательно, решением данного неравенства является этот промежуток.

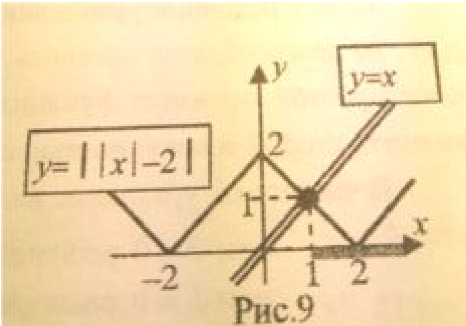


Рис.9

Неравенство вида |f(x)| ≥ |g(x)| решается при помощи разбиения множества X на котором f(x) и g(x) имеют смысл, на промежутки, каждый из которых является промежутком знакопостоянства как f(x) так и g(x). Затем на каждом из этих промежутков решается неравенство без знака модуля. Объединяя найденные решения на всех частях X, получаем множество всех решений. Так же решаются и неравенство более общего вида:

$a_1|f_1(x)|+a_2|f_2(x)|+\ldots+a_x|f_x(x)| \geq g(x)$, где a_1, $a_2\ldots.a_x$ - некоторые действительные числа.

Некоторые неравенства вида $|f(x)| \geq |g(x)|$ целесообразно решать, перейдя к равносильному неравенству $f^2(x) \geq g^2(x)$

3.5Решите неравенство $|x-1|\geq|x|$.

Решение.

$|x-1|\geq|x|\leftrightarrow(x-1)2\geq x2\leftrightarrow x2\ -2x + 1\geq x2\leftrightarrow 2x\leq 1\leftrightarrow x\leq\frac{1}{2}$. Ответ $(-\infty;\frac{1}{2})$

Замечание. Решить неравенство $|x-1|\geq|x|$ - значит найти множество точек числовой оси, расстояние от которых до точка A(1) больше, чем расстояние до точки B(0). Из решения задачи 3.5 следует, что это множество есть промежуток $(-\infty;\frac{1}{2})$.

Приведем два способа замены уравнения $|f(x)|=g(x)$ совокупностью систем:

$$|f(x)|=g(x)\leftrightarrow\left(\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}\right), (5)$$

Либо

$$|f(x)|=g(x)\leftrightarrow\left(\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \text{или} \begin{cases} g(x) < 0 \\ -f(x) = g(x) \end{cases}\right). (6)$$

Если в исходном уравнении функция f(x) имеет более простой вид, чем g(x), то целесообразно заменить его первой совокупностью систем (5), а если более простой вид имеет функция g(x), то исходное уравнение целесообразно заменить совокупностью систем (6)

В частности уравнения вида $|f(x)|=b$, где $b \in R$:

-при $b<0$ решений не имеет,

-при $b=0$ равносильно уравнению $f(x)=0$

-при $b>0$ равносильно совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = b \\ f(x) = -b \end{array}\right.$

3.6 Решите уравнения:

В) $|1-x|-|2x+3|+x+4=0$

Решение п.б) $|x-3|+|x-4|=2x-1\leftrightarrow$

$$\left(\begin{cases} x < 3 \\ -3+3-x+4+2x-1 \end{cases} или \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ x-3-x+4+2x-1 \end{cases} или \begin{cases} x \ge 4 \\ x-3+x-4=2x-1 \end{cases}\right)$$

$$\leftrightarrow\left(\begin{cases} x < 3 \\ 4x = 8 \end{cases} или \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ 2x = 2 \end{cases} или \begin{cases} x \ge 4 \\ 0 * x = 6 \end{cases}\leftrightarrow\left(\begin{cases} x < 3 \\ x = 2 \end{cases} или \begin{cases} 3 \le x < 4 \\ x = 1 \end{cases} или \begin{cases} x \ge 4 \\ x = 1 \end{cases}\leftrightarrow x=2\right.\right.$$

Ответ 2.

Решение этой задачи можно записать иначе. Например, так. Нанесем на числовую ось точки 3 и 4 (решения уравнений x-3=0 и x-4=0), которые разобьют ее за три области: (-∞;3), [3;4) и [4;+∞).

1) Если x<3, то уравнение примет вид –(x-3)-(x-4)=2x-1 или -x+3-x+4=2x-1 откуда 2x=2 т.еx=2. Так как 2϶(-∞;3), то x=2 – корень исходного уравнения.
2) Если 3≤x<4, то уравнение примет вид x-3-(x-4)=2x-1 или x-3-x+4=2x-1 откуда 2x=2 т.е x=1. Так как 1[3;4) то x=1 не является корнем исходного уравнения
3) Если x≥4, то уравнение примет вид x-3+x-4=2x-1 или 0*x=6, что невозможно ни при каком значении x.

   Следовательно имеет решение x=2

Уравнение с двумя переменными, содержащие знак модуля, решаются, аналогично уравнениям с одной переменной, путем раскрытия знака модуля. Разница лишь в том, что придется разбивать уже плоскость на такие множества, на которых значения выражений, состоящих под знаком модуля, имеют постоянный знак.

3.8 Решите уравнение y=|x-y-3|

Обсуждение. Приравняем выражение состоящее под знаком модуля к нулю: x-e-3=0↔e=x-3. Прямая y=x-3 разбивает плоскость на две полуплоскости I={(x;y) : y≥x-3} и II={(x;y) : y<x-3}. Координаты точек, лежащих над прямой и на этой прямой (полуплоскость I) удовлетворяют соотношению y≥x-3 (рис.10)

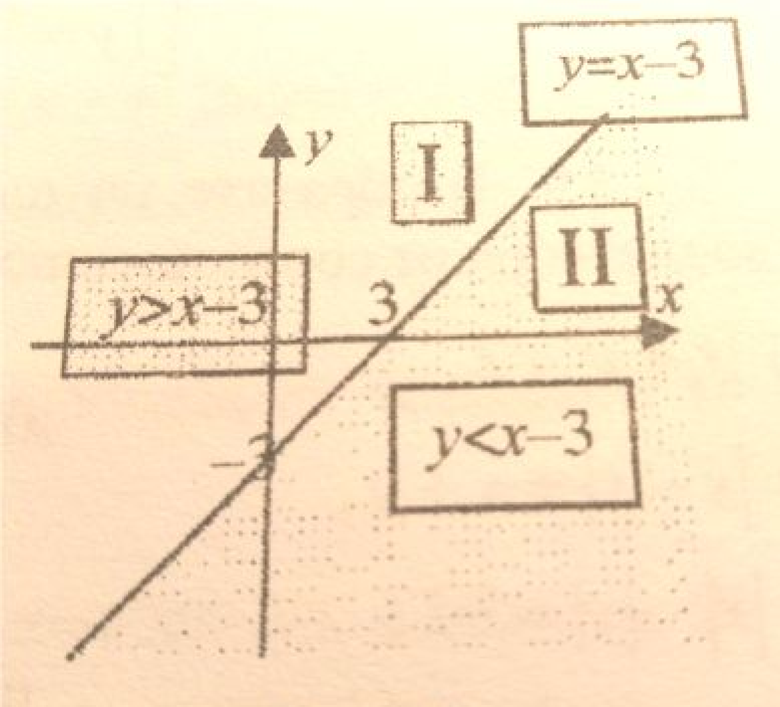


Рис.10

Координаты точек полуплоскости II удовлетворяют соотношению y<x-3. Теперь для пары (x;y) из каждой полуплоскости ясно, какой знак имеет выражение x-y-3. Если (x;y)є{(x;y)|y≥x-3}, то |x-y-3|=-(x-y-3); если {(x;y)|y<x-3}, то |x-y-3|=x-y-3.

Таким образом, исходное уравнение равно сильно совокупности двух систем$\begin{cases} y \geq x-3 \\ y = -(x-y-3) \end{cases}$ или $\begin{cases} y < x-3 \\ y = x-y-3 \end{cases}$. Решение первой системы есть множество точек прямой x=3, лежащих в полуплоскости I. Решение второй системы есть множество точек прямой y=0,5x-1,5, лежащих в полуплоскости II. Объединяя эти множество точек, изображенных на рис. 11

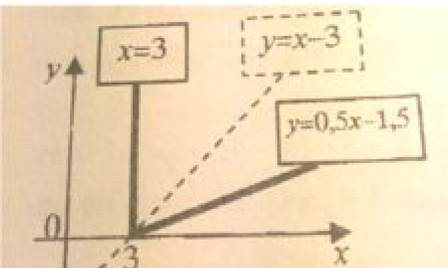


Рис.11

Решение задачи 3.8

$$y=|x-y-3| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-y-3 \le 0 \\ y=-(x-y-3) \end{cases} \\ \begin{cases} x-y-3>0 \\ y=x-y-3 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge x-3 \\ y=-x+y+3 \end{cases} \\ \begin{cases} y<x-3 \\ 2y=x-3 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge x-3 \\ x=3 \end{cases} \\ \begin{cases} y<x-3 \\ t=0{,}5x-1{,}5 \end{cases}\end{array}\right.$$

Координаты точек ломаной изображенной на рис. 11 есть решения уравнения.

Так как для уравнений и неравенств с двумя переменными справедливы теоремы о равносильности, аналогичный (1)-(6), то решение этой же задачи может выглядеть и так:

$$y=|x-y-3| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge 0 \\ y=x-y-3 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 0 \\ y=-x+y+3 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge 0 \\ 2y=x-3 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 0 \\ x=3 \end{cases}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \ge 0 \\ y=0{,}5x-1{,}5 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge 0 \\ x=3 \end{cases}\end{array}\right.$$

3.9 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению:

Решение п.з) «Прямой подход». Чтобы раскрыть знак модуля первого слагаемого, нужно знать знак выражения, состоящего под знаком модуля.

Если x+y≥0, т.е. y≥-x, то |x+y|=x+y. Множество точек, координаты которых (x;y) удовлетворяют соотношению y≥-x, есть полуплоскость над прямой y=-x, и точки этой прямой. Координаты точек полуплоскости по другую сторону от этой прямой удовлетворяют соотношение y<-x и для них |x+y|=-(x+y) (рис.12а)

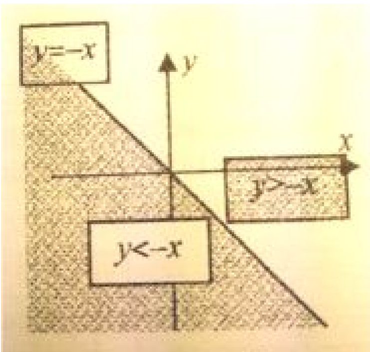


Рис.12а

Аналогично для раскрытия второго модуля нужно рассмотреть полуплоскости по разные стороны от прямой x-y=0(или, что то же самое, y=x). Если точки лежат над прямой y=x и на самой прямой (рис.12б), то их координаты связаны с неравенством y≥x. Поэтому x-y≤0, откуда, |x-y|=x-y. По другую сторону от этой прямой $y<x$, откуда |x-y|=x-y.

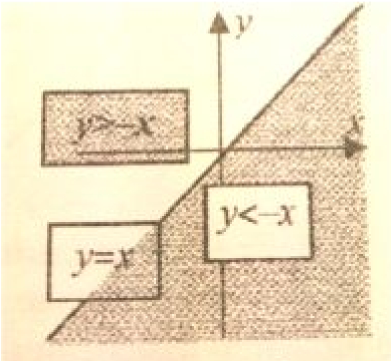


Рис.12б

Двумя прямыми y=-x и y=x плоскость разобьется на 4 плоскости (рис.12в).

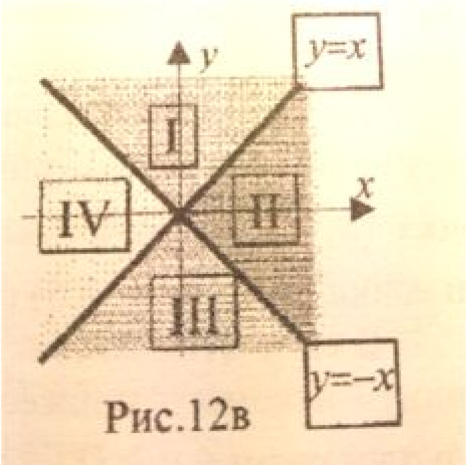


Рис.12в

Области I-IV задаются системами неравенств:

I:$\begin{cases} y \geq -x \\ y \geq x \end{cases}$ II:$\begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x \end{cases}$ III:$\begin{cases} y \leq -x \\ y \leq x \end{cases}$ IV:$\begin{cases} y \leq -x \\ y \geq x \end{cases}$.

Для каждой из этих четырех областей будем раскрывать модули, входящие в исходное неравенство.

В области I точки лежат выше обеих прямых y=-x и y=x, поэтому |x+y|=x+y, и |x-y|=x-y. Значит в области I неравенство |x+y|+|x-y|≥2 равносильно неравенству x+y+y-x≥2, т.е. y≥1

В области II |x+y|=x+y, |x-y|=x-y, следовательно, в области II x+y+x-y≥2 т.е. x≥1.

В области III |x+y|=-x-y, |x-y|=x-y, следовательно, в области III -x-y+x-y≥2, т.е. y≤-1. В области IV |x+y|=-x-y, |x-y|=x-y, следовательно, в области IV -x-y+y-x≥2, т.е. x≤-1.

Таким образом, исходное неравенство равносильно совокупности четырех систем:

$$\begin{cases} y \geq -x \\ y \geq x \\ y \geq 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} y \geq -x \\ y \leq x \\ y \geq 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} y \leq -x \\ y \leq x \\ y \leq 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} y \leq -x \\ y \geq x \\ y \leq 1 \end{cases}$$

Множество точек, определяемое каждой из систем, изображено серым цветом на рис.13I-13IV. Искомое множество равно объединению этих четырех множеств(рис.13V).

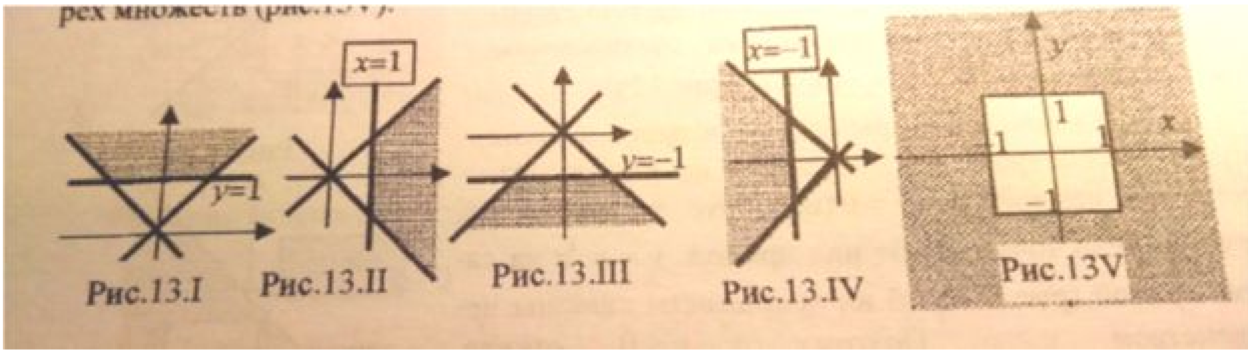


Рис.13.I Рис.13.II Рис.13.III Рис.13.IV Рис.13V

2) Подход с использованием симметрии.

Данное неравенство обладает следующим свойством: оно не изменяет своего вида при изменении знака перед координатой y. В самом деле, заменив в нем y на -y, получим неравенство |x-y|+|x+y|≥2, которое совпадает с исходным (с точностью до перестановки слагаемых).

Из этого свойства неравенства вытекает следующее свойство искомого множества: оно симметрично относительно оси абсцисс. В самом деле, если точка (x;y) входит искомое множество, то в него входит и точка (x;-y), а эти точки (см. задачу 1.5) симметричны относительно оси абсцисс.

В силу отмеченной симметрии, можно сначала построить «верхнюю половину» искомого множества, то есть, ту его часть, которая лежит в верхней полуплоскости(y≥0). Останется симметрично отразить ее относительно оси абсцисс.

Аналогично неравенство не изменяет вида при изменении знака перед координатой x. Отсюда вытекает, что искомое множество симметрично относительно оси ординат. Значит, построение упомянутой выше «верхней половины» искомого множества можно начать ее с «правой половины», то есть с той «правой верхней четвертушки» искомого множества, которая лежит в первой четверти ($x \geq 0$, $y \geq 0$), а затем отразить ее относительно оси ординат.

Заметим далее, что данное неравенство не изменяет вида при перестановки координат x и y. Это означает, что если точка (x;y) входит в искомое множество, то в него входит и точка (y;x). Эти две точки симметричны относительно прямой $y=x$ (биссектрисы 1-3 координатных углов). Значит, искомое множество симметрично относительно прямой $y=x$.

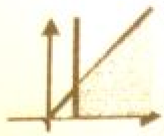


Рис.14.I

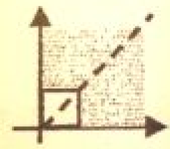


Рис.14.II

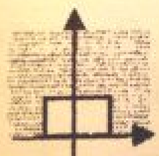


Рис.14.III

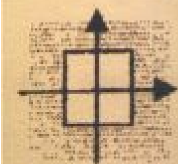


Рис.14.IV

Это позволяет начать построение с той «восьмушки» искомого множества, которая лежит между положительной полуосью абсцисс и биссектрисой первого координатного угла. А затем трижды отразить эту восьмушку относительно прямой $y=x$ и обеих координатных осей.

Итак, пусть точка (x; y) лежит в описанной выше «восьмушке». Это означает, что $x \geq 0$, $y \geq 0$, и $x \geq y$. При таких значениях координат выражения под знаками модулей в данном неравенстве неотрицательны, поэтому модули можно убрать, и неравенство примет вид: $x + y + x - y \geq 2 \leftrightarrow x \geq 1$. Это неравенство определяет часть восьмушки справа от прямой $x=1$ (см. рис. 14. 1). На следующих рисунках представлены результаты описанных выше отражений: относительно прямой $y=x$ (рис.14.2), относительно оси ординат (рис.14.3) и относительно оси абсцисс (рис.14.4). В результате получаем тот же ответ (внешность квадрата), что первым способом (рис.13.5)

Задачи по теме «Линейные и кусочно-линейные функции»

№ 1

Задайте формулой линейную функцию, если известно, что ее график проходит через точки: (-2;-1) и (1;5)

Решение: подставим координаты точек в уравнение линейной функции y=kx+b и определим k и b из системы :

$$\begin{cases}-1 = -2k + b\\ 5 = k + b\end{cases}; \begin{cases}-1 = -2k + b\\ b = 5 - k\end{cases}; \begin{cases}-3k = -b\\ b = 5 - k\end{cases}; \begin{cases}k = 2\\ b = 3\end{cases}$$

Ответ: y=2x+3.

№ 2

Задайте формулой линейную функцию, если известно, что ее график проходит через точку А(1;-2) и параллелен: биссектрисе второго и четвертого координатных углов.

Решение: биссектриса 2 и 4 координатных углов задается уравнением y=-x; так как искомая прямая параллельна биссектрисе, то их угловые коэффициенты одинаковы и равны -1. То есть прямая задается уравнением y=-x+b, а так как А(1;-2) принадлежит прямой, то : -2=1+b, откуда b=-1.

Ответ: y=-x-1.

№ 3.

Задайте формулой линейную функцию, график которой симметричен относительно оси абсцисс графику функции y=-7x-1.

Решение: Возьмем 2 точки, принадлежащие графику функции y=-7x-1: (0;-1) и (1;-8): им симметричны относительно оси абсцисс точки (0;1) и (1;8); найдем коэффициенты k и b из системы:

$$\begin{cases}1 = 0k + b\\ 8 = k + b\end{cases}; \begin{cases}k = 7\\ b = 1\end{cases}$$

Ответ: y=7x+1.

№ 4

Задайте формулой линейную функцию, график которой симметричен относительно оси ординат графику функции: y=-2x + 1

Решение: Возьмем 2 точки принадлежащие графику функции y=-2x + 1: (0;1) и (1;-1). Им симметрично относительно оси ординат точки: (0;1) и (-1;-1).

Найдем коэффициенты k и b из системы:

$$\begin{cases} 1 = 0 * k + b \\ -1 = -1k = b \end{cases}; \begin{cases} b = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Ответ: y=2x+1.

№ 5

Задайте формулой линейную функцию, график которой симметричен относительно начала координат графику функции: $y = \frac{4}{3}x - 2$

Решение: Точки (0;-2) и (3;2) принадлежит графику функции $y = \frac{4}{3}x - 2$, этим точкам относительно начала координат симметричны точки(0;2) и (-3;-2)

Найдем k и b из системы

$$\begin{cases} 2 = 0 * k + b \\ -2 = -3k + b \end{cases}; \begin{cases} b = 2 \\ 3k = 4 \end{cases}; \begin{cases} b = 2 \\ k = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ответ: $y = \frac{4}{3}x - 2$

№ 6

Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям: $\frac{x+1}{y-2} = 2$

Решение:

1. ОДЗ: y≠2

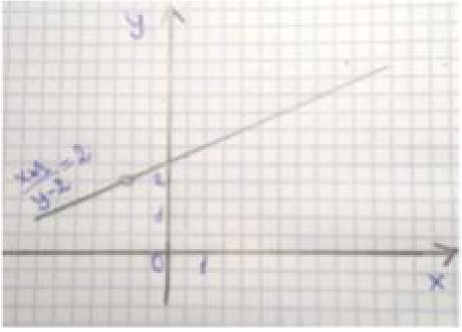
Преобразуем уравнение:

2) x+1=2y-4

2y= x+5

y=x/2 + 2,5 Учтём при построении ОДЗ: выколотую точку с ординатой 2

x	0	3
y	2,5	4



№ 7

Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям: $x^2-3x-4=0$

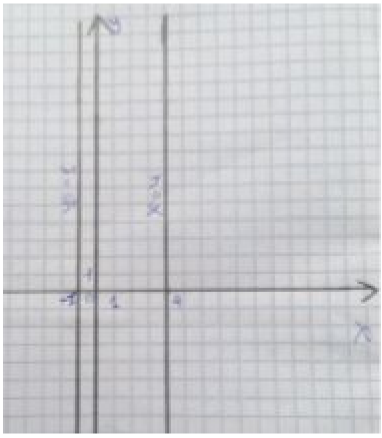
Решение:

$x^2-3x-4=0$

По т. Виета

$x=4$ или $x=-1$

Это прямые параллельные оси у

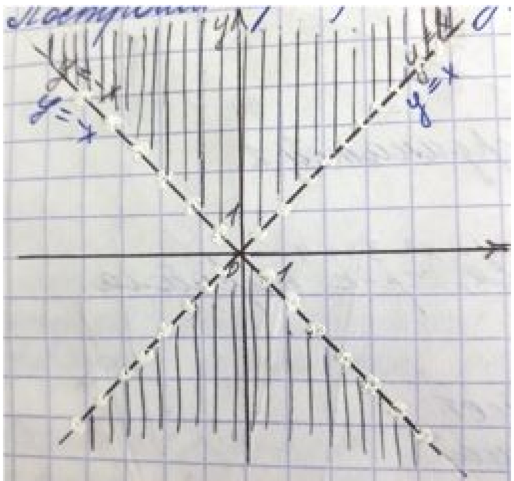


№ 8

Изобразите множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям: $x^2<y^2$

Решение: $x^2-y^2<0$

$$(x-y)(x+y)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y>0 \\ x+y<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y<0 \\ x+y>0 \end{cases} \end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<x \\ y<-x \end{cases} \\ \begin{cases} y>x \\ y>-x \end{cases} \end{array}\right.$$



Построим графики функций y=x ; y=-x

Решением первой системы будет пересечение полуплоскостей, лежащих ниже графиков y=x и y=-x

Решением второй системы будет пересечение полуплоскостей, лежащих ниже графиков y=x и y=-x

На рисунке множество точек, удовлетворяющих соотношению $x^2<y^2$ показано штриховкой.

№ 9

Постройте график функции:

$$y=\begin{cases} -4x+1, \text{если } x<-2 \\ 9, \text{если } -2\le x<-1 \\ -2x+7, \text{если } -1\le x<2 \\ 4x+5, \text{если} \end{cases}$$

Решение:

y=-4x+1, $x<-2$

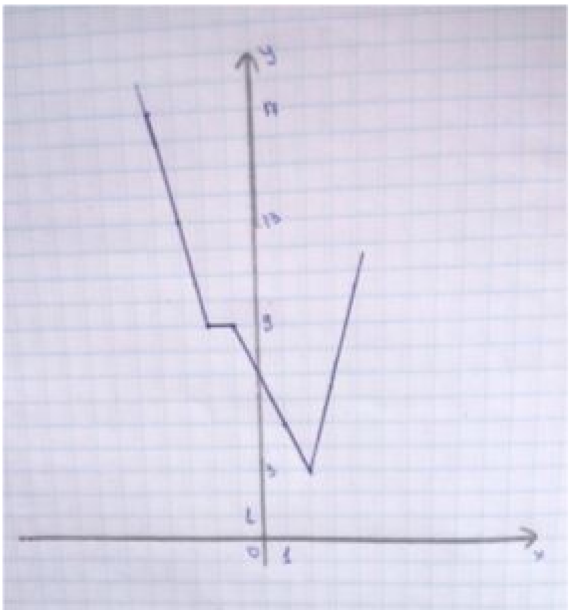
x	-3	-4
y	13	17

y=-2x+7, $-1\le x<2$

x	-1	1
y	9	5

y=4x-5, $x\ge 2$

x	2	3
y	3	7



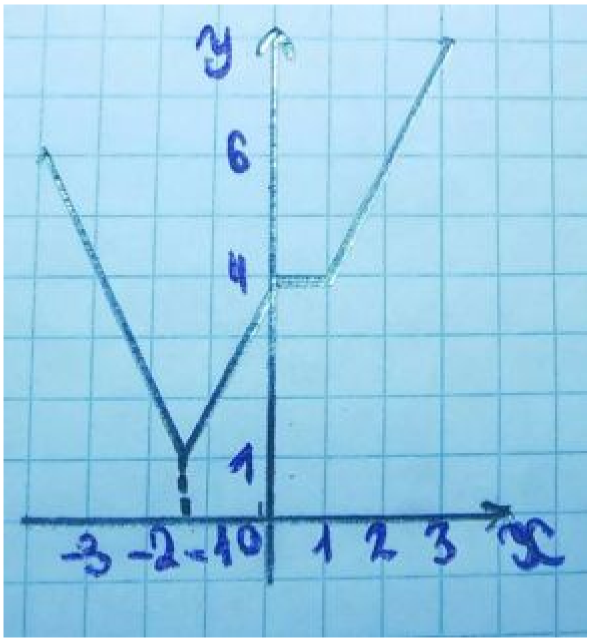
№ 10

На рисунке изображен график кусочно-линейной функции, определенной для любого x принадлежащего R. Запишите линейное уравнение для этой функции.

Решение: на каждом из промежутков (-∞;-1,5);(-1,5; 0);(0;1);[1;+∞) функция линейная, задается формулой y=kx+b. Найдем для каждого промежутка коэффициент k и b, подставив координаты 2 точек из этого промежутка:

1) (-∞;-1,5]:   (-3;4)и (-1,5;1)

$\begin{cases}4 = -3k + b\\ 1 = -1{,}5k + b\end{cases}$; $\begin{cases}4 = -2b + 2 + b\\ 1{,}5k = b - 1\end{cases}$; $\begin{cases}b = -2\\ 1{,}5k = -2 - 1\end{cases}$; $\begin{cases}b = -2\\ k = -2\end{cases}$;   y=-2x-2



2) (-1,5;0] :(-1;2) и (0;4)

$\begin{cases}4 = 0k + b\\ 2 = -k + b\end{cases}$; $\begin{cases}b = 4\\ k = 2\end{cases}$ y = 2x + 4

3) (0;1) y = 4

4) [1+ ∞) : (1;4) и (2;6)

$\begin{cases}4 = k + b\\ 6 = 2k + b\end{cases}$; $\begin{cases}b = 2\\ 2 = k\end{cases}$;   y = 2k+2

Ответ: $y\begin{cases}-2x - 2, \text{если } x \leq\ -1{,}5\\ 2x + 4, \text{если} - 1{,}5 < x \leq\\ 4, \text{если } 0 < x < 1\\ 2x + 2, \text{если } x \geq 1\end{cases}$

№ 11

Запишите без знака модуля: |3x-3|+|2x+6|-|x|

Решение: Найдем значения x, при которых выражения под знаком модуля образуются в ноль:

x_1=1. x_2=-3, x_3=0. Эти точки разбивают числовую ось на 4 множества.

1. Если x ≤ -3: |3x-3|=3x-3

$|2x+6|=-2x-6$

$|x|=-x$,

т.е. $|3x-3|+|2x+6|-|x|=3-3x-2x-6+x=-4x-3$

2. Если $-3<x\leq 0$: $|3x-3|=3-3x$

$|2x+6|=2x+6$

$|x|=-x$,

т.е. $|3x-3|+|2x+6|-|x|=3-3+2x+6+x=9$

3) Если $0<x\leq 1$: $|3x-3|=3-3x$

$|2x+6|=2x+6$

$|x|=x$

$|3x-3|+|2x+6|-|x|=3-3x+2x+6-x=-2x+9$

4) Если $x>1$: $|3x-3|=3x-3$

$|2x+6|=2x+6$

$|x|=x$

$|3x-3|+|2x+6|-|x|=3x-3+2x+6-x=4x+3$

Ответ: $|3x-3|+|2x+6|-|x|=\begin{Bmatrix} -4x-3\text{, } если \text{ } x\leq -3 \\ 9\text{, если } -3<3\leq 0 \\ 9-2x\text{, если } 0<x\leq 1 \\ 4x+3\text{, если } x>1 \end{Bmatrix}$

№ 12

Запишите без знака модуля выражение: $\left|x-3-|x|\right|$.

Решение: Раскроем внутренний модуль:

1) $x\geq 0$: $\left|x-3-|x|\right| = |x-3-x| = |-3| = 3$

2) $x<0$: $\left|x-3-|x|\right| = |x-3+x| = |2x-3| = -2x+3$, т.к. при отрицательных x выражение 2x-3 тоже отрицательно.

Ответ: $\left|x-3-|x|\right| = \begin{cases} 3, если \text{ } x>0 \\ 3-2x, если \text{ } x<0 \end{cases}$

№ 13

Постройте график функции: $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$

Решение:

$$|x|+|x-1|+|x-2|=\begin{cases} -x - x + 1 - x + 2, \text{ если } x < 0 \\ x - x + 1 - x + 2, \text{ если } 0 \le x < 1 \\ x + x - 1 - x + 2, \text{ если } 1 \le x < 2 \\ x + x - 1 + x - 2, \text{ если } x \ge 2 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$y=\begin{cases} -3x + 3, \text{ если } x < 0 \\ -x + 3, \text{ если } 0 \le x < 1 \\ x + 1, \text{ если } 1 \le x < 2 \\ 3x - 3, \text{ если } x \ge 2 \end{cases}$$

y=-3x+3

x	-1	-2
y	6	9

y=-x+3

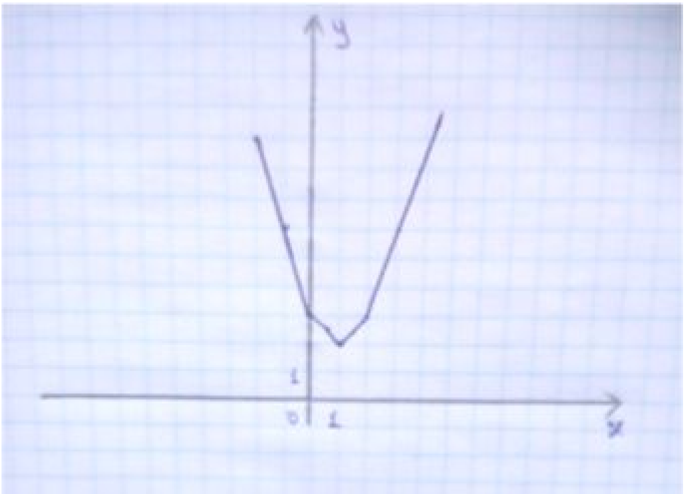
x	0	0,5
y	3	2,5

y=x+1

x	1	1.5
y	2	2,5

y=3x-3

x	2	3
y	3	6



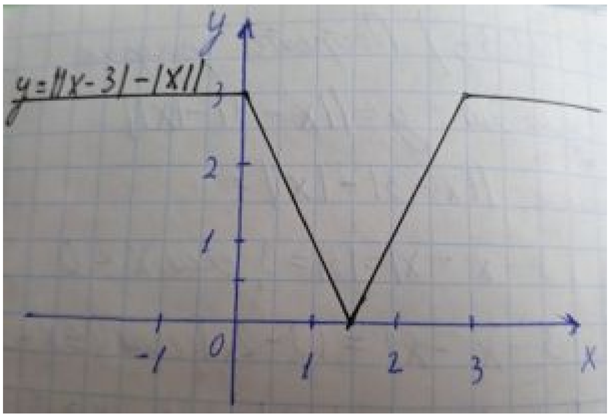
№ 14

Постройте график функции: $y = ||x - 3| - |x||$

Решение:

$$||x - 3| - |x||=\begin{cases} |3 - x + x| = |3| = 3, \text{ если } x < 0 \\ |3 - x - x| = |3 - 2x|, \text{ если } 0 \le x < 3 \\ |-3 + x - x| = |-3| = 3, \text{ если } 3 \le x \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$y=\begin{cases} 3, \text{если } x < 0 \\ 3-2x, \text{если } 0 \le x < 1,5 \\ 2x-3, \text{если } 1,5 \le x < 3 \\ 3, \text{если } x \ge 3 \end{cases}$$



y=3-2x

x	0	1
y	3	1

y=2x-3

x	2	1,5
y	1	0

№ 15

Решите уравнение: |1-x| + |2x+3| + x + 4 = 0

Решение:

) 2) 3)

-1,5 1

Рассмотрим 3 промежутка

1) x ≤ -1,5

1 – x – (-2x – 3) + x + 4 = 0

1 – x + 2x + 3 + x + 4 = 0

2x + 8 = 0

2x = -8

x = -4

(входит в рассматриваемый промежуток)

2) -1,5 ≤ x ≤ 1

1 – x – (2x + 3) + x + 4 = 0

1 – x – 2x - 3 + x + 4 = 0

-2x + 2 = 0

$2x = 2$

$x = 1$

(входит в рассматриваемый промежуток)

3) $x > 1$

$X - 1 - 2x - 3 + x + 4 = 0$

$0x + 0= 0$

При любых $x > 0$

Ответ: -4; [1; +∞]

№ 16

Решите уравнения: $||x - 3 |- x | = 4$

Решение6

$||x - 3| - x | = 4 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-3| - x = 4 \\ |x-3| - x = -4 \end{array}\right.$

1)Если $x <3$

$\left[\begin{array}{l} 3 - x - x = 4 \\ x - 3 - x = -4 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} -2x = 1 \\ -2x = -7 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ x = 3{,}5 - \end{array}\right.$ *не подходит*

2)Если $x \geq 3$

$\left[\begin{array}{l} x - 3 - x = 4 \\ x - 3 - x = -4 \end{array}\right.$; $\left[\begin{array}{l} -3 = 4 \\ -3 = -4 \end{array}\right.$ нет решений

Ответ: $-\frac{1}{2}$

№ 17

Решите неравенство: $|x+2|-2|x-1|<4$

Решение: рассмотрим промежутки знакопостоянства:

1) $x<-2$: $-x-2-2+2x<4$

$x<8$.

$x \in (-\infty;-2)$

2) $-2 \leq x<1$: $x+2-2+2x>4$

$3x<4$

$x < 1\frac{1}{3}$

x∈ [-2;1)

3) x≥1: x+2-2x+2<4

-x<0 x

x>0

x∈ [1;+ ∞)

Объединяя три промежутка, получим всю числовую прямую.

Ответ:(- ∞;∞).

№ 18

Решите неравенство: |x+2|+|x+4|>8

Решение:

1) Если x<-4:

-x-2-x-4>8

-2x>14|: (-2)

x<-7

2) Если -4≤ x<-2

-x+2+x+4>8

0x>6. Нет решений

3) Если x≥-2

x+2+x+4>8

2x>2

x>1

Ответ: (-∞;-7)v(1;+ ∞).

№ 19

Решите неравенство: $\left|\frac{x+1}{3-2x}\right| > 1$

Решение:

$$\left|\frac{x+1}{3-2x}\right| > 1 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{x+1}{3-2x} > 1\\ \frac{x+1}{3-2x} < -1\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3-2x \neq 0\\ x+1 > 3-2x\end{cases}\\ \begin{cases}3-2x \neq 0\\ x+1 < -3+2x\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \neq 1{,}5\\ 3x > 2\end{cases}\\ \begin{cases}x \neq 1{,}5\\ -x < -4\end{cases}\end{array}\right.; \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \neq 1{,}5\\ x > \frac{2}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}x \neq 1{,}5\\ x > 4\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}; 1{,}5\right) \cup (1{,}5; 4) \cup (4;\ +\infty)$

№ 20

Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению |x|-|y|=-1

Решение:

1.Если x≥0, y<0;

то x+1=1

y=-x-1

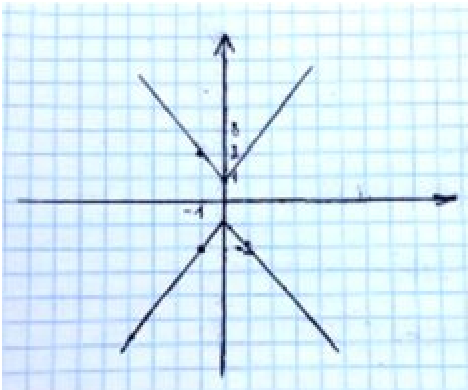
2.Если y≥0, y=x+1

3.Еслиx<0, y≥0;

То -x + y=-1; y = x + 1

4. -x -y = -1

y= -x + 1



№ 21

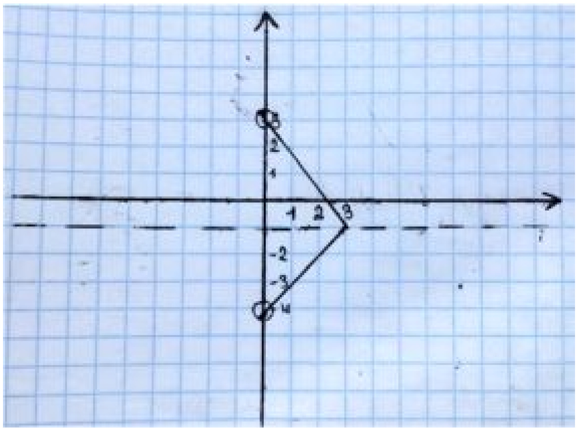
Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют соотношению $\frac{2|x|}{x} = |y = 1| + |x - 1|$

Решение:

1) $\begin{cases} x > 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

y=-x+2

2) $\begin{cases} x > 0 \\ y \leq -1 \end{cases}$



y=x-4

3) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq -1 \end{cases}$

y=x-2

3) $\begin{cases} x < 0 \\ y < -1 \end{cases}$

y=-x

7. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Мы хотим познакомить вас с методом математической индукции. Сначала рассмотрим решения двух задач, затем сформулируем принцип математической индукции и обсудим, каким образом этот метод можно применять.

ЗАДАЧА 1. Квадрат делиться отрезком на две части, после этого одна из полученных частей снова делится на две части, и так далее. Определите, на какое число частей разделится квадрат через n шагов.

Обсуждение. После первого шага мы по условию получаем 2 части. На втором шаге мы одну часть оставляем без изменений, а вторую делим на 2 части и получаем всего 3 части. На третьем шаге мы две части оставляем без изменений, а последнюю (третью) делим на 2 части и получаем всего 2 + 2 = 4 части. На четвертом шаге мы три части оставляем без изменений, а последнюю делим на 2 части и получаем всего 3+2=5 частей.

Итак, на 1 шаге получаем 2 части, на 2 шаге получаем 3 части, на 3 шаге получаем 4 части, на 4 шаге получаем 5 частей.

Напрашивается предположение, что через n шагов мы получим n+1 частей. Мы можем подтвердить это предположение, проверив его еще при n = 6, 7, 8. Значит можно закончить решение? А почему это верно при n =100 или n = 1000? Случается, аналогичный вывод может оказаться поспешным (примеры мы приведём). Как же доказать наше предположение?

Предположим на мгновение, что через 100 шагов мы получили 101 часть. Тогда на 101 шаге мы 100 частей оставляем бы изменений, а последнюю делим на две части и получаем на 101 шаге всего 100+2=102 части.

Итак, если бы нам как-то удалось проверить, что через 100 шагов квадрат разобьётся 101 часть, то только что приведенное рассуждение служило бы доказательством того, что через 101 шаг квадрат разобьется на 102 части. Заметим, что похожее рассуждение можно провести, подставив вместо числа 100 вольное натуральное число. (Провести для произвольного натурального k)

Проделаем это. Предположим, что через k шагов квадрат разобьется на k+1 частей. Тогда на (k+1)-м шаге мы k частей оставляем без изменений, а последнюю делим на 2 части и получаем на (k+1)-м шаге всего (k+1) +1=k+2 части.

Проанализируем, что мы сейчас доказали. Попробуем в это доказательство вместо k подставить 3. Но через 3 шага и не нужно предполагать, что квадрат разобьется на 4 части, так это нами уже было точно проверено в начале решения, а значит, из последнего доказательства (при k = 3) получаем, что через 4 шага квадрат на самом деле разобьется на 5 частей. Подставим вместо k в это доказательство 4. Получим, что через 5 шагов квадрат разобьется 6 частей. Отсюда получаем, что на 6 шаге квадрат разбивается на 7 частей, на 7 шаге на 8 частей и т. д., до бесконечности.

То есть наше предположение, что через n шагов квадрат разобьется на n+1 частей, становится доказанным.

ЗАДАЧА 2. На сколько частей делят плоскость n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через оду точку? (О таких прямых говорят "прямые общего положения")

Решение. Обозначим искомое число an. Легко подсчитать, что a1=2, a2=4, a3=7 (см. рисунок).

Общая формула угадывается не очень легко. Однако нетрудно получить соотношение, связывающее an+1 и an (его называют рекуррентным соотношением). Пусть n прямых делят плоскость на an частей. Проведем (n+1)-ю прямую. Она пересечет, по условно, каждую из n прямых и все эти n точек пересечения будут различны. Эти n точек разобьют прямую нашу прямую на n+1 отрезков. (Чтобы распилить бревно на n+1 частей, надо сделать n распилов). Каждый этих отрезков делит одну из имевшихся an частей на две, таким образом, количество частей увеличивается на n+1, т. е.

an+1=an+(n+1) (*)

Теперь допустим, что мы добрались до некоторого ответа. которому удовлетворяют подсчитанные первые значения. Мы подскажем такой ответ:

$an=n(n+1)2+1=n2+n+22$ (**)

Проверьте, что этой формуле удовлетворяют a1, a2, a3. (Предполагаемый ответ нужно уметь вычислять для любых n, например

$ak=k(k+1)2+1$, $an+1=(n+1)(n+2)2+1=n2+n+22$,

$a2m=2m(2m+1)2+1=2m2+m+1$ и т.д.)

Допустим, что мы уже доказали нашу формулу некоторого числа n: $an=n2+n+22$. Зная соотношение (*). легко подсчитать $an+1$: $an+1=an+(an+1)=n2+n+22+n+1=n2+3n+42==(n+1)2+(n+1)+22$

что совпадает, как мы уже подсчитывали раньше, с желаемым результатом для $an+1$.

Итак, если наша формула верна для некоторого конкретного числа n, то она верна и для следующего числа n+1.Но мы уже проверяли формулу для n=1, 2, 3. Поэтому она будет верна для n=4: она остается верной и для n=5, и так можно проверить верность формулы для любого n. Таким образом, всегда

$an=n2+n+22$

Метод рассуждения, примененный при решении приведенных задач, называется методом полной математической индукции. Сформулируем его в общем виде.

Предположим, что каждого натурального числа n мы имеем некоторое утверждение M(n) (например, M(1)- одна прямая делит плоскость на $a1=2$ части, M(2)- две прямые делит плоскость на $a2=4$ части,..., M(n)- n прямых общего положения делят плоскость на $an=n2+n+22$ частей,...)

Предположим также, что 1) утверждение M (1) верно (т.е. мы проверили предполагаемый результат для n=1) 2) доказано, что если верно M(n), то верно и M(n+1). Тогда M(n) для каждого натурального числа n.

Итак, для того чтобы, например, доказать какую-нибудь формулу методом математической индукции, нужно:

1) (База индукции) Проверить ее справедливость при некоторых первых значениях n.

2) (Индукционный переход) Доказать следующую теорему: если формула верна для некоторого, n тогда она верна и для следующего номера, n+1.

Важность этих двух пунктов в доказательстве теорем методом математической индукции поясним таким шуточным примером, принадлежащим М. И. Башмакову. Допустим, что вы должны на автобусе ехать до некоторого места, находящегося от вас за несколько остановок. Вам нужно: 1. Сесть в автобус. 2. Знать, что если он пришел на какую-то остановку, то он прилет и на следующую. Второе условие гарантирует, что если вы начали движение, то оно вас обязательно приведет к цели. Если же оно соблюдается, но вы не сели в автобус, то, разумеется, вы никуда не приедете.

Приведем более серьезный пример. "докажем", что все натуральные числа равны между собой. Для одного первого числа это, разумеется, справедливо. Пусть наше утверждение доказано для первых n натуральных чисел Т.е. предположим, что первые n натуральных чисел равны между собой. Докажем, что тогда и число n+1 равно всем предшествующим. Действительно, по пред- положению,$n=n-1$. Прибавим к обеим частям этого верного равенства по единице. Получим n+1=n, что и требовалось доказать. Вы, конечно, видите ошибку в рассуждении. Автобус-то движется, но мы в него не сели. Для того чтобы можно было продолжать рассуждение, нам нужно иметь равенство хотя бы первых двух чисел

Следует сказать, что затруднения с проверкой утверждения для первых значений n или, как говорят, с базой индукции встречаются редко. Гораздо болеесодержательной и трудной является вторая часть рассуждения так называемый индукционный переход. Если для предполагаемой формулы, проверенной даже для очень большого числа первых случаев, не удается провести индукционный переход, то она может оказаться неверной.

Вот два примера.

1. Исследование при n=0,1,2,…, 40 чисел вида $n2-n+41$ (многочлен, предложенный Эйлером) способно склонить к мысли о простоте этих чисел при любом n. Однако 412-41+41-составное число.

2. П. Ферма полагал что все числа вида$Fn=22n+1$, где n=0,1,2,… (числа Ферма)-простые. Первые пять чисел Ферма действительно простые:$F0=220+1=3$.$F1=221+1=5$,$F2=222+1=24+1=17$. $F3=223+1=28+1=257$, $F4=224+1=216=65537$

Однако для F5 Л. Эйлер нашел разложение: $F5= 4294967297=641\cdot6700417$

Настойчивые усилия получить при помощн ЭВМ хотя бы одно новое простое число Ферма пока не увенчались успехом. Рассмотрим теперь ряд задач, которые целесообразно решать с помощью метода математической индукции

ЗАДАЧА 3. Докажите, что для любого натурального числа n справедливы утверждения;

a) $n3+5n$ делится на 6

b) $22n-1+3n-4$ делится на 9.

c) $11n+2+122n+1$ делится на 133.

d) $52n+1\cdot2n+2+3n+2\cdot22n+1$делится на 19

e) $33n+2+24n+1$делится на 11

f) $4n+15-1$делится на 9.

Решение задачи Задачи)

1. База индукции. При n=1 ясно, что 13+5·1=6 Делится на 6

2. Предположим, что при некотором натуральном числе k справедливо утверждение «k3 +5k делится на 6», и докажем, что тогда и число (k+ 1)3 +5(k+1) делится на 6. Преобразуем последнее выражение:

$(k+1)3+5(k+1)=k3+3k3+3k+1+5k+5=(k3+5k)+(3k2+3k+6)$.

Выражение, стоящее в первой скобке, делится на 6 по индукционному предположению. Значит, для того чтобы доказать утверждение, достаточно доказать, что 3k2 +3k+6 делится на 6, а для этого достаточно доказать, что 3k2+3k делится на 6, а для этого достаточно доказать, что k2+k делится ил 2 (понятно ли это?)

Итак, нам достаточно доказать, что k2+k делится на 2. Мы, конечно, могли бы опять воспользоваться методом, математической индукции $(k+1)2+(k+1)=k2+2k+1+k+1=(k2 \quad +k)+(2k \quad +2)$, но проще заметить, что $k2+k=k(k+1)$– произведение двух последовательных целых чисел, одно из них четное. Утверждение доказано.

Решение задачи 3в)

1. База индукции. N=1, тогда 113 123 1331 +1728 3059=133·23. Кстати, проше было начать не с n=1, а с n=0:112 121=121+12=133

2. Предположим, что при некотором натуральном k $11k+2+122k+1$делится на 133. Докажем, что тогда 11k+3 +122k+3 делится на 133. После тождественных преобразований 11k+3+122k+3 =11·11k+2+144·122k+1=11·(11k+2 +122k+1)+133·122k+1 утверждение становится очевидным (выражение в скобках делится на 133 по индукционному предположению)

ЗАДАЧА 4 (числа Фибоначчи) последовательность (an) чисел Фибоначчи 1,1, 2, 3, 5, 8,13, 21, 34… задается следующим образом: a1 =1 a2, =1, а каждое следующее- сумма двух предыдущих: an an-1 +an-2 (n≥3) ,52 (n 3). докажите, что для любого натурального числа n справедливы утверждения:

a) $a1+a2+\cdots+an=an+2 -1$

b) $a1+a3+\cdots+a2n-1=a2n$

c) $a2+a4+\cdots+a2n=a2n+1$

d) $a1-a2+a3-a4+\cdots-a2n=1-a2n-1$

e) $a12+a22+\cdots+an2=an\cdot an+1$

f) $a1a2+a2a3+\cdots+a2n-1a2n-1=a2n2$

g) $a5n$ делится на 5.

Решение задачи 4a)

1. При n=1 a1=a3-1- истина.

2. Предположим. что выполняется равенство $a1+a2+\cdots+an=an+2$. Прибавим к обеим частям $an+1$:$a1+a2+\cdots+an+an+1=an+2+an+1-1$ вспомним теперь определение чисел Фибоначчи,

an+2+an+1=an+an+1=an+3. и в правой части равенства стоит .an+3-1.Утвержде не доказано. Числа Фибоначчи- очень интересный объект. Для более подробного ознакомления с ними мы рекомендуем вам несколько раз переиздававшуюся книгу [3].

Отметим еще некоторые вариации проведении в проведение индукционного перехода.

Можно предположить верным не только утверждение M(n), но и все утверждения до M(n) включительно. ЗАДАЧА 5. Докажите, что любой (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разбить, на треугольники

Решение задачи 5. Количество сторон в многоугольнике будем обозначать n.

1. База индукции (n=3) - очевидна

2. Предположим, что любой многоугольник с числом можно разбить на лом сторон, не превосходящим n, можно разбить на треугольники. Возьмем теперь произвольный (n+1)-угольник. Заметим, что в нем всегда можно провести диагональ, целиком лежащую внутри многоугольника. Этого можно достичь, например, вращением одной из его сторон вокруг вершины. Эта диагональ разбивает (n+1) – угольник на два многоугольника, с числом сторон у каждого, не превосходящим n. Применив к ним индукционное предположение, получим разбиение на треугольники исходного многоугольника

ЗАДАЧА 6. Дано n произвольных квадратов. Докажите, что их можно разрезать на части так, что из полученных частей можно сложить новый квадрат. (Здесь самое трудное – база индукции)

Бывает, что с помощью индукционного перехода мы не можем из истинности M(n) вывести истинность M(n+1), а можем доказать только истинность M(n+m) (происходит "скачок" через m членов). Если база будет доказана для первых m утверждений M (1), M (2), …, M(r), то метод математической индукции остается в силе.

ЗАДАЧА 7. Докажите, что всякое целое число рублей, большее 7, можно заплатить трешками и пятерками.

(Это старая задача, уже попавшая в олимпиадный фольклор. Вы, возможно, не помните, что существовали купюры достоинством 3 рубля и 5 рублей. На различных Олимпиадах предлагались вариации на эту тему. Например, на третьей международной тест-рейтинговой олимпиаде «Интеллектуальный марафон» в 1993 году предлагалась следующая задача.

Центральный Банк выпустил в обращение монеты достоинством в 15, 20 и 48 рублей и изъял из обращения все другие деньги.

а) Докажите, что любое целое число рублей можно уплатить этими монетами, быть может, получив сдачу.

б) Докажите, что любую сумму, начиная с некоторого N, можно уплатить и без сдачи, и найдите наименьшее возможное N.)

Решение задачи 7

Ясно, как можно заплатить 8, 9 и 10 рублей:

1. 8=3 + 5, 9=3 + 3 + 3, 10=5 + 5. 2.

2. Пусть мы можем заплатить n рублей. Добавляя трешку, мы сможем заплатить n+3 рублей. Происходит "скачок" на 3. Начиная с 8, 9, 10 и шагая через 3, мы получим любое число, большее чем 7:

8, 11, 14…;

9, 12, 15…;

10, 13, 16… .

Обратим еще раз ваше внимание на то, что мы доказываем истинность утверждении M(n) начиная не обязательно с n = 1. (В задаче 7 − с n = 8, в задаче 5 − с n = 3,в задаче 3в можно было начать с n = 0.)

Рассмотрим теперь еще некоторые способы индукционного перехода.

ЗАДАЧА 8 (доказательство тождеств по индукции)

Пусть нам надо доказать тождества $a(n) = b(n)$ при всех значениях n. Для этого нам достаточно проверить, что a(1) = b(1) и при любом $ka(k+1)$ – $a(k)$=$b(k+1)$ =$b(k+1)$ – $b(k)$. Другими словами, проверяем базу, делаем индукционное предположение, что a(k)=$b(k)$−истина, а затем, прибавляя к обеим частям тождества одно и то же число, получаем верное равенство $a(k+-\ b(k+1)$.

Докажите тождества:

а) $1+2+3+\cdots n=n(n+1)2$

б) $1+3+5+\ +(2n-1)=n2$

в) $12+22+32+\cdots+n2=n(n+1)(2n+1)6$

г) $13+23+33+\cdots+n3=(n(n+1)2)2$

д) $11\cdot2\cdot3+12\cdot3\cdot4+\cdots+1n(n+1)(n+2)=n(n+3)4(n+1)(n+2)$

е) $1-12+13-14+\cdots+12n-1-12n=1n+1+1n+2+\cdots+12n$

Вопрос о том, откуда взялись эти формулы и вообще, как выводить и угадывать формулы, - это отдельный и трудный разговор, далеко выходящий за рамки данной книжки. Очень рекомендуем вам книгу [5].

Покажем все же, как мы "угадали" в задаче 2, что $an=1+n(n+1)2$. По ходу решения мы выяснили, что имеет место формула $an+1=an+(n+1)$. Подставляя в это равенство вместо n значения $n=n-1$, $n=n-2,...,$ $n=2,n=1$, получим: $an=an-1+nan-1=an-2+(n-1)$

$a3=a2+3$ $a2=a1+2$ Сложив все эти равенства получим

$an+an-1+\cdots+a2+a1=(an-1+an-2+\cdots a1)+(n+(n-1)+\cdots+2)$ или $an=a1(n+(n-1)+\cdots+2)$.

Учитывая, что $a1=2$, последние равенство можно переписать так: $an=1+(n+(n-1)+\cdots+1)=1+n(n+1)2$

Решение задачи 8в) Пусть $a(n)=\ 12+22+\cdots+n2$, $b(n)=n(n+1)(2n+1)6$. Нам нужно доказать, что $a(n)=b(n)$ при всех натуральных n.

1. $n=1$. $a(1)=12=1$; $b(1)=1\cdot2\cdot36+1$.

2. Пусть справедливо $a(k)=b(k)$. Вычислим $a(k+1)-a(k)$:

$(12+22+\cdots+k2+(k+1)2)-(12+22+\cdots+k2)=(k+1)2$.

Вычислим $b(k+1)-b(k)$:

$(k+1)(k+2)(k+3)6-k(k+1)(k+2)6=k+16\cdot(2k2+7k+6-2k2-k)=k+16\cdot(6k+6)=(k+1)$
2.

Видим, что равенето$a(k)+\ (k+1) = b(k)+(k+1)$ совпадает с нужным равенством $a(k+1) = b(k+1)$

ЗАДАЧА 9. Докажите, что n окружностей, расположенных на одной плоскости, делят ее не более чем на $n2-n+2$ частей.

ЗАДАЧА 10. (Доказательство неравенств по индукции)

Пусть нам надо доказать справедливость неравенства $a(n)>b(n)$ для всех n, начиная с некоторого s. Тогда нам достаточно проверить справедливость неравенства $a(s)>b(s)$ и для всех $k\geq s$ справедливость неравенства $a(k+1)-a(k)>b(k+1)-b(k)$.

Докажем неравенства:

а) $1n+1+1n+2+\cdots+12n>35$ $(n\geq 3)$

б) $122+132+\cdots+1n2<1-1n$ $(n\geq 2)$

в) $2(\sqrt{}n+1-1)<1+1\sqrt{}2+1\sqrt{}3+\cdots+1\sqrt{}n<2\sqrt{}n$

г) $n2<1+12+13+\cdots+12n-1<n$

Решение задачи 10б)

Пусть $a(n)=1-1n$, $b(n)=122+132+\cdots+1n2$

1. $a(2)=1-12=12$, $b(n)=122=14$. Ясно, что $b(2)<a(2)$.

2. Вычислим $b(k+1)-b(k)$:

$(122+132+\cdots+1k2+1(k+1)2)-(122+132+\cdots+1k2)=1(k+1)2$. Ясно, что $1(k+1)2<1k(k+1)$. Неравенство доказано. (Мы начали с верного неравенства 14<12, а затем к левой части на каждом шаге прибавляли меньшее число, чем к правой.)

Задача 11 (Вторая вариация на тему доказательства неравенств)

Пусть надо доказать для положительных $a(n)$ и $b(n)$ справедливость неравенства $a(n)\ >b(n)$ для всех целых чисел n, начиная с некоторого s. Тогда нам достаточно проверить справедливость неравенства $a(s)\ >b(s)$ и для всех k>s справедливость неравенства $a(k+1)a(k)>b(k+1)b(k)$. Докажите неравенства:

а) $n!>2n$ $(n\geq 4)$. ($n!$ - обозначение для произведения $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$, например $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$; $n!$ читается "знак-факториал"). б) $2n>2n$ $(n\geq 3)$.

в) $2n>n2+2$ $(n\geq 5)$.

г) $3n>n3$ $(n\neq 3)$.

д) $nn>(n+1)(n-1)$ $(n\geq 2)$.

е) $(n!)2>nn$ $(n\geq 3)$.

ж) $(2n)!(n!)2>4nn+1$ $(n\geq 2)$.

Решение задачи 11е) Обозначим $a(n)=(n!)2$, $b(n)=nn$.

1. $a(3)=(3!)2=62=36$; $b(3)=33=27$ и $a(3)>b(3)$

2. $a(k+1)a(k)=((k+1)!2)(k!)2=(k!(k+1))2(k!)2=(k!)2\cdot(k+1)2(k!)2=(k+1)2$.

$b(k+1)b(k)=(k+1)2kk$.

Докажем справедливость неравенства $(k+1)2>(k+1)k+1kk$. Преобразуем его:$kk(k+1)2>(k+1)k+1\leftrightarrow kk>(k+1)k-1$.

Справедливость последнего неравенства доказана в задаче 10д).

Иногда с помощью метода математической индукции легче доказать более сильное утверждение, чем то, которое предложено в задаче. Так, например, неравенство б) задачи 10 доказывается легче, чем более слабое неравенство $122+132+\cdots+1n2<2$. Более подробно об этом вы можете прочитать в статье журнала «Квант» (Цинман Л. парадокс исследования. 1976.N 11.С. 9-15).

Задача 14. Из натуральных чисел составляются последовательности, в которых каждое последующее число больше квадрата предыдущего, а последнее число в последовательности равно 1995(последовательности могут иметь различную длину). Докажите, что различных последовательностей такого вида меньше, чем число 1995.

Решение задачи 14. Как водится, число 1995 в этой не по существу. Решим более общую задачу- докажем сформулированное утверждение для произвольного n≥3 (тогда, в частности, утверждение будет справедливо и для n=1995). Итак, обозначим p(n) количество последовательностей с описанными условиями.

1.Выпишем последовательности и вычислим значения p(n) для n=1,2,3,4,5;

n=1. Последовательность:(1) ;p(1)=1

n=2. последовательности:(2),(1,2); p(2)=2

n=3. последовательности:(3),(1,3);p(3)=2

n=4. последовательности:(4),(1,4);p(4)=2

n=5. последовательности:(5),(1,5),(2,5),(1,2,5); p(1)=4

Видим, что для n=3,4,5 утверждение задачи справедливо.

2. Предположим теперь, что утверждение справедливо для всех чисел, не превосходящих некоторогоn. Докажем, что тогда утверждение справедливо и для n+1. Посмотрим, как устроены последовательности. Последовательность, состоящая из одного члена,- это последовательность (n+1). Если членов последовательности больше чем один, то предпоследним членом может быть любое натуральное число, не превосходящее k, такое, что $k^2 < n + 1 \leq (k + 1)^2$. (В частности, для числа 1995 предпоследними членами последовательности могут быть числа 1,2…44) Теперь для каждого такого числа k можно построить p(k) последовательностей, и по индукционному положению p(k)<p. Итак, p(n+1)=1+p(1)+p(2)+…+p(k)=1+1+2+p(3)+p(4)+…p(k)<1+1+2+3+4+…+p(k)= $=1 + \frac{k(k+1)}{2}$, что не больше, чем k^2(при k≥2)

$$1 + \frac{k(k+1)}{2} \leq k^2 \Leftrightarrow 2 + k^2 + k \leq 2k^2 \Leftrightarrow 2k^2 - k - 2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (k+1)(k-2) \geq 0$$

Конечно, интересно было бы получить формулу для p(n), но это уже совсем другая задача. Если вы всё-таки решите ее, проверьте, что p(1995)=418.

Докажем теперь важное неравенство, которое нам понадобится в последующих задачах ЗМШ.

Задача15.(Неравенство Бернулли).

Докажите, $(1 + a)^n > 1 + na$, где $a > -1$, $a \neq 0$, $n \geq 2$

Решение задачи 15. 1.n=2. $(1 + a)^2 = 1 + 2a + a^2$, что больше, чем 1+2a, т.к. $a^2 > 0$.

2. Предположим, что справедливо неравенство $(1 + a)^n > 1 + na$и выведем отсюда, что справедливо неравенство

$$(1 + a)^{n+1} > 1 + (n + 1)a.$$

Действительно, по условию 1+a>0, поэтому справедливо неравенство

$$(1+a)^{n+1} > (1+na)(1+a).$$

Припишем последнее неравенство так:

$$(1+a)^{n+1} > 1+(n+1)a+na^2.$$

Т.к. $na^2 > 0$, получаем справедливое неравенство.

Задачи по теме «Метод математической индукции»

№ 1

Докажите, что для любого натурального числа n справедливо утверждение $2^{2n-1}+3n+4$ делится на 9 *(возможна опечатка в условии, при «–4» не выполняется для n=1)*.

Решение: 1) База индукции: n=1: $2^{2-1}+3+4=9$ делится на 9.

2) Индукционный переход: Предположим, что утверждение верно для некоторого n, т.е. $2^{2n-1}+3n+4$ делится на 9, тогда оно должно быть верно и для n+1, т.е. $2^{2(n+1)-1}+3(n+1)+4$ должно делиться на 9. Докажем это: $2^{2(n+1)-1}+3(n+1)+4=2^{2n+2-1}+3n+3+4=2^{2n-1}\cdot 2^2+3n+7=4\cdot 2^{2n-1}+3n+7$. Если два числа делятся на 9 нацело, то и их разница делится на 9 нацело. Найдем разность между полученным выражением и выражением для n:

$4\cdot 2^{2n-1}+3n+7-2^{2n-1}-3n-4=3\cdot 2^{2n-1}+3=3(2^{2n-1}+1)$. Чтобы это выражение делилось на 9, достаточно доказать, что выражение в скобках делится на 3, сделаем это с помощью метода математической индукции.

1) База индукции: n=1: $2^{2-1}+1=2+1=3$ – делится на три.

2) Индукционный переход: Предположим, что утверждение верно для некоторого n, т.е. $2^{2n-1}+1$ делится на 3, тогда оно должно быть верно и для n+1, т.е. $2^{2(n+1)-1}+1$ должно делиться на 3. $2^{2(n+1)-1}+1=2^{2n+1}+1=4\cdot 2^{2n-1}+1=4\cdot 2^{2n-1}+4-3=4(2^{2n-1}+1)-3$. Т.к. выражение в скобке делится на 3 и 3 делится на три, то делится на три и их разность, значит, $2^{2(n+1)-1}+1$ делится на три.

Таким образом, мы доказали, что при верном для n утверждении оно верно и для n+1, а значит по м.м.и. он верно для всех натуральных n.

№ 2

Докажите, что для любого натурального числа n справедливо утверждение $3^{3n+2}+2^{4n+1}$ делится на 11.

Решение: 1) База индукции: n=1: $3^{3+2}+2^{4+1}=3^5+2^5=243+32=275$ делится на 11 по признаку делимости.

2) Индукционный переход: Предположим, что утверждение верно для некоторого n, т.е. $3^{3n+2}+2^{4n+1}$ делится на 11, тогда оно должно быть верно и для n+1, т.е. $3^{3(n+1)+2}+2^{4(n+1)+1}$ должно делиться на 11. Докажем это: $3^{3(n+1)+2}+2^{4(n+1)+1}=3^{3n+3+2}+2^{4n+4+1}=27\cdot 3^{3n+2}+16\cdot 2^{4n+1}=$ $=16\cdot 3^{3n+2}+11\cdot 3^{3n+2}+16\cdot 2^{4n+1}$ $=16\cdot(3^{3n+2}+2^{4n+1})+11\cdot 3^{3n+2}$. Первого слагаемое делится на 11, т.к. скобка делится на 11по индукционному предположению, второе слагаемое также делится на 11, значит, вся сумма делится на 11. Индукционный переход доказан, значит, данное утверждение справедливо для любого натурального числа n.

№ 3

Докажите, что для чисел Фибоначчи справедливо утверждение $a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}=a_{2n}$.

Решение: 1) База индукции: n=1: $a_1=a_2$ – верно, т.к. 1=1

2) Индукционный переход: Предположим, что утверждение верно для некоторого n, т.е. $a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}=a_{2n}$, тогда оно должно быть верно и для n+1, т.е. $a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2(n+1)-1}=a_{2(n+1)}$. Докажем это: $a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2(n+1)-1}=$ $a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1}+a_{2n+1}=(a_1+a_3+\ldots+a_{2n-1})+a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n+1}=a_{2n+2}=a_{2(n+1)}$. Здесь мы заменили сумму в скобках на a_{2n} по индукционному предположению, а сумма двух последовательных чисел Фибоначчи $a_{2n}+a_{2n+1}$ равна следующему числу Фибоначчи a_{2n+2}. Индукционный переход доказан, значит, данное утверждение справедливо для чисел Фибоначчи.

№ 4

Докажите, что для чисел Фибоначчи справедливо утверждение $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$

Решение: 1) База индукции: n=1: $a_1^2=a_1\cdot a_2$ – верно, т.к. $1^2=1\cdot 1$

2) Индукционный переход: Предположим, что утверждение верно для некоторого n, т.е. $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}$, тогда оно должно быть верно и для n+1, т.е. $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2=a_{n+1}\cdot a_{n+2}$. Докажем это: $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2=(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)+a_{n+1}^2=$

$a_n\cdot a_{n+1}+a_{n+1}^2=a_{n+1}(a_n+a_{n+1})=a_{n+1}\cdot a_{n+2}$. Здесь мы заменили сумму в скобках на $a_n\cdot a_{n+1}$ по индукционному предположению, а сумма двух последовательных чисел Фибоначчи a_n+a_{n+1} равна следующему числу Фибоначчи a_{n+2}. Индукционный переход доказан, значит, данное утверждение справедливо для чисел Фибоначчи.

№ 5

Докажите тождество $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Решение: 1) База индукции: проверим, что $a(1)=b(1)$: $1=1^2$ – верно.

2) Индукционное предположение: предположим, что $1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$ – верно.

3) Переход: вычислим $a(k+1)–a(k)$: $1+3+5+\ldots+(2k–1)+ (2k+1) – (1+3+5+\ldots+(2k–1))= 2k+1$;

вычислим $b(k+1)–b(k)$: $(k+1)^2–k^2=k^2+2k+1–k^2=2k+1$.

Т.к. равенство $a(k+1)–a(k)= b(k+1)–b(k)$ верное, значит верно и равенство $a(k+1)= b(k+1)$, значит, тождество доказано.

№ 6

Докажите тождество $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Решение: 1) База индукции: проверим, что $a(1)=b(1)$: $1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2$ – верно, т.к. 1=1.

2) Индукционное предположение: предположим, что $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$ – верно.

3) Переход: вычислим a(k+1)–a(k): $1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3+(k+1)^3-(1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3)=(k+1)^3$;

вычислим b(k+1)–b(k): $\left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2-\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2=\frac{(k+1)^2(k+2)^2-k^2(k+1)^2}{4}=\frac{(k+1)^2(k^2+4k+4-k^2)}{4}=\frac{(k+1)^2(4k+4)}{4}=\frac{(k+1)^2\cdot 4(k+1)}{4}=(k+1)^3$.

Т.к. равенство a(k+1)–a(k)= b(k+1)–b(k) верное, значит верно и равенство a(k+1)= b(k+1), значит, тождество доказано.

№ 7

Докажите неравенство: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5}$ (n≥3).

Решение: 1) База индукции: $a(3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{37}{60}>\frac{3}{5}$

2) Индукционное предположение: предположим, что $\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{3}{5}$

3) Переход: вычислим a(k+1)–a(k): $\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{2}{2k+2}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=\frac{2k+2-2k-1}{(2k+1)(2k+2)}=\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}>0$

Т.к. a(k+1)–a(k)>0, то a(k+1)>a(k)>$\frac{3}{5}$. Значит, данное неравенство верно для всех k≥3, ч.т.д.

№ 8

Докажите неравенство: $3^n>n^3$ (n≠3)

Решение: 1) База индукции: проверим неравенство для n=1, 2 и 4: $3^1>1^3$, верно т.к. 3>1. $3^2>2^3$, верно, т.к. 9>8. $3^4>4^3$, верно, т.к. 81>64.

2) Индукционное предположение: предположим, что $3^k>k^3$ верно для k≥4.

3) Переход: вычислим $\frac{a(k+1)}{a(k)}$: $\frac{3^{k+1}}{3^k}=\frac{3\cdot 3^k}{3^k}=3$

Вычислим $\frac{b(k+1)}{b(k)}$: $\frac{(k+1)^3}{k^3} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^3 = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^3$

Т.к. k≥4, то максимальное значение $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^3$ достигается при k=4, при увеличении k значение этого выражения убывает. При k=4 $\left(1 + \frac{1}{4}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64} < 2$

Получили, что $\frac{a(k+1)}{a(k)}$=3, $\frac{b(k+1)}{b(k)} < 2$, значит, $\frac{a(k+1)}{a(k)} > \frac{b(k+1)}{b(k)}$, значит, $a(k+1) > b(k+1)$, значит, исходное неравенство верно для всех n≠3.

№ 9

Докажите неравенство: $n^n>(n+1)^{n-1}$ (n≥2)

Решение: 1) База индукции: проверим неравенство для n=2: $2^2>3^1$, т.к. 4>3.

2) Индукционное предположение: предположим, что $k^k>(k+1)^{k-1}$ верно для k≥2

3) Переход: вычислим $\frac{a(k+1)}{a(k)}$: $\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} = \frac{(k+1)(k+1)^k}{k^k} = (k+1)\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = (k+1)\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$

Вычислим $\frac{b(k+1)}{b(k)}$: $\frac{(k+2)^k}{(k+1)^{k-1}} = \frac{(k+2)^k}{(k+1)^k(k+1)^{-1}} = \frac{(k+1)^1(k+2)^k}{(k+1)^k} = (k+1)\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^k = (k+1)\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^k$

Сравним $\frac{a(k+1)}{a(k)}$ $и$ $\frac{b(k+1)}{b(k)}$: первый множитель k+1 совпадает, а т.к. k+1>k, то $1 + \frac{1}{k} > 1 + \frac{1}{k+1}$,

значит, $\frac{a(k+1)}{a(k)} > \frac{b(k+1)}{b(k)}$, значит, исходное неравенство верно для n≥2.

№ 10

Дано n положительных чисел x_1, x_2, …, x_n, причем известно, что $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$. Докажите, что тогда $x_1+x_2+\ldots+x_n \geq n$.

Решение: 1) База индукции: пусть n=2. Тогда $x_1 \cdot x_2 = 1$. Если оба числа равны 1, то их сумма $x_1+x_2=2$ и утверждение верно. Если же $x_1>1$, а $x_2<1$, тогда $x_2 = \frac{1}{x_1}$ и их сумма $x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1{}^2+1}{x_1}$. Рассмотрим неравенство $\frac{x_1{}^2+1}{x_1} \geq 2$ или $\frac{x_1{}^2-2x_1+1}{x_1} \geq 0$, т.е. $\frac{(x_1-1)^2}{x_1} \geq 0$. Это неравенство справедливо для всех положительных чисел x_1, значит, для n=2 утверждение справедливо.

2) Индукционное предположение: пусть утверждение справедливо при n=k, т.е. для k вышеуказанных чисел $x_1+x_2+\ldots+x_k \geq k$.

3) Индуктивный переход. Пусть n=k+1 и $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$ положительные числа и $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k \cdot x_{k+1}=1$. Если все эти числа равны 1, то их сумма равна k+1 и тогда неравенство верно. Если среди этих чисел есть число, не равное 1, тогда найдется еще одно число, не равное единице, причем одно из них больше единицы, а другое меньше. Пусть $x_k>1$, $x_{k+1}<1$. Рассмотрим произведение $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots\ x_{k-1} \cdot (x_k \cdot x_{k+1})=1$, значит, по индукционному предположению $x_1+x_2+\ldots+(x_k \cdot x_{k+1}) \geq k$. Прибавим к обеим частям неравенства x_k+x_{k+1}:

$x_1+x_2+\ldots+ x_k+x_{k+1}+(x_k \cdot x_{k+1}) \geq k+ x_k+x_{k+1}$

$x_1+x_2+\ldots+ x_k+x_{k+1} \geq k+ x_k+x_{k+1}- (x_k \cdot x_{k+1})$

$k+ x_k+x_{k+1}- (x_k \cdot x_{k+1})=k+1-1+x_{k+1}+ x_k(1-x_{k+1})=k+1+(1-x_{k+1})(x_k-1)>k+1$, т.к. $1-x_{k+1}>0$ и $x_k-1>0$.

Следовательно, $x_1+x_2+\ldots+ x_k+x_{k+1} \geq k+1$. Утверждение доказано.

№ 11 (неравенство Коши).

Дано n положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Докажите неравенство $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$

Решение: Используем предыдущую задачу. Рассмотрим n чисел $\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}$, $\frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}$, $\ldots \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}}$. Они положительные, т.к. положительны числа x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Их произведение равно 1:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} = 1$$

Значит, по доказанному в предыдущей задаче, их сумма больше или равна n:

$$\frac{x_1}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \geq n$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}} \geq n$$

или

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Что и требовалось доказать.

№ 12 (Формула Бине).

(a_n) – последовательность Фибоначчи. Докажите формулу:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Решение: 1) База индукции:

$a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{2} = 1$ - верно.

$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1$ - верно.

2) Индуктивное предположение. Пусть равенство верно для n и n+1, тогда она должна быть верна и для n+2.

Проверим это. По определению чисел Фибоначчи $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\right)$$

Получили, что формула верна для a_{n+2}, формула Бине доказана.

8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ ЦИРКУЛЕМ И ЛИНЕЙКОЙ

Предисловие

Построение геометрических фигур циркулем и линейкой представляет собой одну из древнейших областей математики.

Иногда, хотя и не слишком часто, в построениях используют и другие инструменты, однако мы в дальнейшем будем использовать в основном циркуль и линейку, так как для этих инструментов сложились различные систематические методы построения, некоторые из которых мы здесь и рассмотрим.

Нужно отметить, что решение задачи на построение требует отдельного анализа для определения того, сколько у задачи имеется решений и как количество решений зависит от начальных данных.

Не всегда можно провести четкую грань между разными методами решения задач на построение. Нередко решение задачи одним методом можно, несколько сместив акценты, истолковать как решение другим методом.

Несколько слов о порядке изложения.

Первый раздел посвящен формализации того, какие умозаключения мы можем сделать относительно уже данных фигур, а так же того, что мы можем делать при помощи циркуля и линейки.

Во втором разделе приведены элементарные построения, которые важны не столько сами по себе, сколько потому, что они являются часто повторяющимися элементами других, более сложных построений, поэтому мы рекомендуем изучить их особенно тщательно, тем более, что они не слишком сложны.

Следующие пять разделов посвящены обзору конкретных методов построения. Каждому методу посвящен отдельный раздел, в котором излагаются основная идея метода, примеры, иллюстрирующие его, и задачи на его применение.

Отметим, что одна и та же задача может иллюстрировать различные методы построения. Мы считаем это вполне оправданным, поскольку полагаем, что освоение метода важнее, чем решение отдельной конкретной задачи. Именно поэтому мы рекомендуем не останавливаться на решении задачи одним методом, а искать решения и другими методами, тем более, что решая задачу из какого-то раздела, мы находимся в контексте данного метода, что может являться более или менее существенной подсказкой.

1.Введение

Математика - точная наука, поэтому необходимо формализовать "нематематические" понятия циркуля и линейки. Прежде всего, давайте перечислим, какие у нас имеются "базовые" возможности и какие элементарные построения можно осуществлять с помощью циркуля и линейки.

Без циркуля и линейки мы можем:

- по трем различным точкам, лежащим на одной прямой или данной дуге окружности, определить, какая из них лежит между двумя другими;
- отметить точку, отличную от конечного числа данных точек и не лежащую ни на одной линии из конечного числа данных прямых и окружностей;
- отметить по точке в двух частях, на которые прямая, отрезок, луч или дуга окружности делится данной точкой;
- отметить по точке в двух областях, на которые плоскость делится данной прямой или окружностью;
- отметить точку на данном отрезке или данной дуге окружности;
- по двум данным точкам определить, совпадают они или нет;
- для двух данных линий, каждая из которых является отрезком, лучом, окружностью или дугой окружности, найти все точки их пересечения (в дальнейшем все эти точки считаются построенными);
- по данному ненулевому углу определить, какая из его сторон переходит в другую при повороте вокруг вершины в положительном (против часовой стрелки) направлении, оставляющем эту сторону внутри угла.

Последняя возможность позволяет нам различать углы не только по величине, но и по направлению, если несколько уточнить понятие угла. Пара несовпадающих лучей с общим началом делит плоскость на две части, которые мы также будем называть углами. (Обычно символом угла АОВ будет обозначаться угол, не превосходящий развернутого.) Чтобы задать один из этих углов, достаточно, например указать какую-нибудь точку внутри него (мы не будем этого делать, когда из контекста ясно, о каком из углов идет речь). А чтобы задать направление угла, лучи, являющиеся его сторонами, нужно считать упорядоченными, то есть указать, какой из них является первым, а какой - вторым. Например, углы АОВ и ВОА
равны по величине, но противоположно направлены.

Замечание. В выборе положительного и отрицательного направления для углов имеется произвол. Для того, чтобы избежать этого произвола, есть смысл говорить об ориентации углов, при этом любые два угла могут быть либо одинаково, либо противоположно ориентированными.

При помощи линейки мы можем провести прямую через две данные точки (если точки различны, то такая прямая единственная).

При помощи циркуля мы можем:

- построить окружность с центром в одной данной точке и проходящей через другую данную точку;
- построить отрезок данной длины (то есть равный данному отрезку) с одним из концов в заданной точке.

Теперь, когда мы формализовали понятияьциркуля и линейки, решение задачи на построение можно формулировать в геометрических терминах.

Несмотря на сравнительно небольшое количество базовых возможностей и элементарных построений, они позволяют достаточно много. Например, покажем, как по прямой и двум различным не лежащим на ней точкам определить, находят эти точки по одну или по разные стороны прямой . Нужно просто провести через эти две точки прямую. Если исходная и построенная прямые не пересекаются, то точки, конечно, лежат по одну сторону. Если же они пересекаются, то нужно посмотреть, какая из трех точек (две исходные точки и точка пересечения, то есть все три, лежащие на построенной прямой) лежит между двумя другими. Попробуйте разобраться с аналогичной ситуацией, в котором прямая заменяется окружностью.

Мы рекомендуем описывать построения (по крайней мере, в нескольких первых задачах) подробно, начиная от базовых возможностей.

2. Простейшие базовые построения

В этом разделе мы опишем простейшие построения, которые являются рабочими инструментами для других, более сложных построений.

Посмотрим, как можно построить следующие элементы.

Отрезок данной прямой с данным концом на этой прямой, равный данному. Для второго конца отрезка подойдет любая точка пересечения прямой и окружностей с центром в данной точке и радиусом, равным длине данного отрезка. Если на исходной прямой выбрано направление, то из двух построенных отрезков можно выбрать тот, направление которого (из данной точки) совпадает с направлением прямой. (Разберитесь с тем, как это делать.)

Серединный перпендикуляр к данному отрезку AB. Строим пару окружностей с центрами в точках A и B и радиусами AB. Нетрудно видеть, что эти окружности пересекаются в двух различных точках C и D, а прямая CD является требуемым серединным перпендикуляром. (Отметим, что попутно мы построили середину отрезка AB.)

Перпендикуляр к данной прямой *l* и проходящая через данную точку A. Строим окружность ωс центром в точке A, пересекающую прямую l в двух различных точках. (Как это сделать?) Серединный перпендикуляр к отрезку с концами в точках пересечения прямой l и окружности ω- требуемый.

Прямая, параллельная данной прямой *l* и проходящая через данную точку A. Проводим прямую l', перпендикулярно l и проходящую через точку A, а затем прямую l'', перпендикулярную прямой l' и проходящую через ту же точку A. Прямая l'' - требуемая.

Деление отрезка AB на n равных частей. Проводим прямую l, проходящую через точку A и не проходящую через точку B. Затем на прямой l от точки A откладываем в одну сторону последовательно n равных отрезков AA_1,A_1A_2, …,$A_{n-1}A_n$. По теореме Фалеса прямые, проходящие через точки A_1,A_2, …,A_{n-1} и параллельные A_nB, делят отрезок AB на n равных частей.

Небольшая вариация предыдущего приема позволяет поделить отрезок в отношении m:n для любых натуральных чисел m и n, а также в отношении, равном отношению длин двух заданных отрезков.

Построение центра данной окружности. Это точка пересечения серединных перпендикуляров к двум непараллельным хордам окружности.

Построение угла по данной первой его стороне OA, равного, с учетом направления, данному ненулевому углу A'O'B'. Строим пару окружностей ω и ω' одинаковых радиусов с центрами O и O'. Пусть окружность ωпересекают сторону искомого угла в точке C, а окружность ω' пересекает стороны исходного угла в точках C' и D'. Далее, проводим окружность α с центром в точке C и радиусом, равным C'D'. Пусть α пересекается с окружностью ωв точках B_1и B_2. Оба угла - AOB_1и AOB_2- равны по величине углу A'O'B' и противоположно ориентированы. Искомым будет тот из них, который одинаково ориентирован с углом A'O'B'.

Важное наблюдение. Пользуясь базовыми построениями, можно произвольную точку переместить на заданный вектор и повернуть вокруг заданной точки на заданный ориентированный угол. А так как отрезок можно восстановить по его концам, луч - по паре точек, одна из которых является его началом, прямую - по двум различным точкам, окружность - по трем различным точкам, две из которых являются ее концами, то любую систему, состоящую из конечного числа точек, отрезков, лучей, прямых, окружностей и дуг окружностей и дуг окружностей также можно переместить на заданный вектор и повернуть вокруг заданной точки на заданный ориентированный угол. Этим соображением мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

3.Метод двух геометрических мест (ДГМ)

Это, пожалуй, самый известный метод построения. Он основан на следующем соображении. Пусть задачу удалось свести к нахождению точки, удовлетворяющей ряду условий. Если взять только часть условий, то удовлетворяющих им точек может уже оказаться много. Эти точки заполняют, как говорят, некоторое геометрическое место точек (ГМТ). Выбрав другую часть условий, мы получим некоторое новое геометрическое место точек. Тогда искомая точка, если она существует, лежит в пересечении этих двух геометрических мест.

Пример 1. Построение окружности, описанной около заданного треугольника ABC, является хорошим примером применения метода ДМГ. Достаточно найти центр окружности - точку, равноудаленную от точек A, B и C. Рассмотрим случай невырожденного треугольника. ГМТ, равноудаленных от точек B и C, - это серединный перпендикуляр к отрезку AB. ГМТ, равноудаленных от точек B и C, - это серединный перпендикуляр к отрезку BC. Эти перпендикуляры не параллельны, а значит пересекаются в единственной точке, которая и будет искомой. Таким образом, в этом случае всегда имеется единственное решение.

Пример 2. Построить окружность, вписанную в заданный треугольник. Это построение аналогично предыдущему: здесь требуется найти точку внутри треугольника, равноудаленную от его сторон. Это точка пересечения биссектрис любых двух углов треугольника.

Пример 3. Построить треугольник по трем сторонам. Более точно, построить треугольник, стороны которого равны трем данным отрезкам. Мы рассмотрим случай, когда выполняются все неравенства треугольника, то есть длина любого из данных отрезков меньше суммы длин двух других отрезков. Строим отрезок , равный одному из данных. ГМТ, удаленных от одного конца построенного отрезка на расстояние, равное второму данному отрезку, - это окружность с центром в этом конце и радиусом, равным длине второго отрезка. Точно так же, ГМТ, удаленных от другого конца

построенного отрезка на расстояние, равное третьему данному отрезку, - это окружность с центром в другом конце и радиусом, равным длине третьего отрезка. В силу выполнения трех неравенств треугольника эти две окружности пересекаются в двух точках, любую из которых можно взять в качестве третьей вершины искомого треугольника. Как видим, в этом случае, если все три исходных отрезка - разные, имеются два решения, которые дают равные, но противоположно ориентированные треугольники.
остроение методом ДМГ треугольника по стороне и двум смежным с ней углам также хорошо известно из школьного курса.

Перечислим некоторые хорошо известные полезные геометрические места точек.

1. Даны две различные точки A и B. Геометрическим местом точек M таких, что угол AMB равен заданному,является объединение двух дуг окружностей, стягивающих хорду AB. В случае прямого угла эти дуги образуют одну окружность с диаметром AB.
2. Геометрическим местом центров окружностей данного радиуса r, касающихся заданной прямой является пара прямых, параллельных исходной прямой и удаленных от нее на расстояние r.
3. Геометрическим местом центров окружностей данного радиуса r, касающихся данной окружности радиуса R, является окружность с тем же центром и радиусом r+R (случай внешнего касания), а также, в случае r$\neq R$,- окружность с тем же центром и радиусом $|r-R|$(случай внутреннего касания).
4. а) Даны две различные точки A и B. Геометрическим местом точек M с заданной разностью $\lambda = AM^2 - BM^2$ является прямая, перпендикулярная прямой AB.

б)Найдем геометрическое место точек, для которых отрезки касательных, проведенных через них к двум различным не концентрическим окружностям равны. (Для концентрических окружностей это ГМТ будет пустым множеством.) Заметим, что квадрат расстояния от заданной точки до точки касания проведенной из нее касательной к заданной окружности равен разности квадратов расстояния от исходной точки до центра и радиуса окружности (теорема Пифагора). Поэтому искомое ГМТ принадлежит некоторой прямой, перпендикулярной прямой, проходящей через центры данных окружностей. Эта прямая называется *радикальной осью* исходных окружностей. Осталось выяснить, какие точки радикальной оси удовлетворяют требуемому условию. Можно показать, что если окружности не пересекаются, то подходят все точки радикальной оси. Если же окружности пересекаются, то радикальная ось содержит их общую хорду, никакие точки которой не входят в искомое ГМТ. Наконец, если окружности касаются, то радикальная ось проходит через точку касания, которую тоже нужно исключить.

в)Рассмотрим окружность ωи точку M. Проведем через M какую-нибудь секущую к окружности ω, пересекающую ее в точках A и B.По известной теореме произведение MA$\cdot MB$не зависит от выбора секущей. Это произведение, взятое со знаком плюс, если точка M находится вне окружности ω, и со знаком минус, если внутри, называются степенью точки M относительно окружности ω. Геометрическим местом точек с равными степенями относительно двух данных неконцентрических окружностей является радикальная ось этих окружностей.

5. Даны две различные точки A и B. Геометрическим местом точек M с заданным отношением $\lambda = AM/BM$является окружность (окружность Аполлония), симметричная относительно прямой AB. (Или серединный перпендикуляр к отрезку AB, если $\lambda = 1$.)

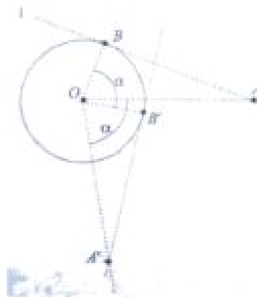
4. Метод вспомогательной фигуры (ВФ)

В некоторых случаях задачу удается свести к построению не отдельной ключевой точки, а ключевой вспомогательной фигуры. Ясно, что любая фигура, которую можно построить при помощи циркуля и линейки, восстанавливается по некоторому конечному числу своих точек. Поэтому, разумеется, вспомогательную фигуру можно было бы заменить конечным множеством вспомогательных точек. Часто, однако, рассуждения в терминах фигуры позволяют увидеть идею построения более отчетливо.

Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 1. Укажем способ построения касательной из данной точки к данной окружности методом ВФ. Точку обозначим через А, а центр окружности - через О. Очевидно, что при повороте на произвольный угол вокруг центра окружности точки сохраняют расстояние до центра, а касательные переходят в касательные.

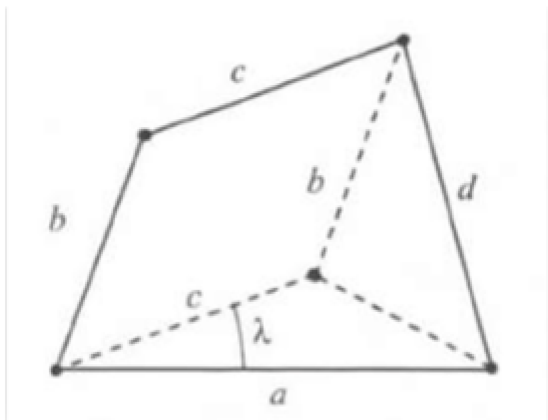
Идея состоит в том, чтобы построить какую-нибудь касательную (это и будет вспомогательная фигура) и повернуть ее вокруг центра на подходящий угол.



Подводим касательную к какой-либо точке В’ окружности и отмечаем на ней точку А’, находящуюся на таком же расстоянии от центра окружности О, что и точка А. Теперь при повороте точки В’ вокруг центра окружности на угол α, равный углу А’ОА, она перейдет в точку В, которая и будет точкой касания требуемой касательной.

Пример 2. Построить четырехугольник, если даны его четыре последовательные стороны a, b, c, d и угол λмежду противоположными сторонами a и c. Рассмотрим параллелограмм со сторонами b и c (см. рисунок). Мы можем построить первый вспомогательный треугольник с основанием a, так как у него известны две стороны a, c и угол между ними λ.

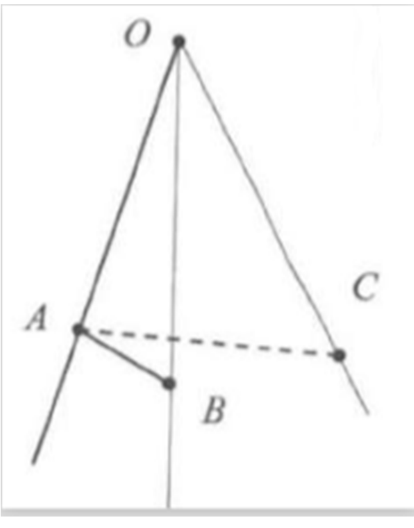
После этого можно построить примыкающий к нему второй вспомогательный треугольник по трем сторонам: b, d и стороне только что построенного треугольника.



Начертив оба вспомогательных треугольника, мы получаем искомый четырехугольник, построив вышеуказанный параллелограмм со сторонами b и c.

Следующий пример адресован тем, кто знаком с понятием трехгранного угла.

Пример 3. Даны плоские углы трехгранного угла. Построить его двугранные углы. (Имеется в виду построение углов на плоскости, равных по величине двугранным углам.) Напомним, что величиной двугранного угла называется величина плоского угла, образованного перпендикулярами, проведенными из произвольной точки ребра двугранного угла в плоскостях прилежащих граней. Обозначим вершину трехгранного угла через O и рассмотрим на одном из ребер какую-либо точку A, отличную от вершины O. Начнем построение с отрезка OA, длина которого может быть произвольной. Пусть перпендикуляра, проведенные через A в плоскостях, смежных с ребром OA, пересекают другие ребра точках B и C. Далее строим прямоугольный треугольник OAB, так как у него известен катет и прилежащий угол, являющийся одним из плоских углов трехгранного угла. Точно так же можно построить треугольник OAC. Теперь можно построить треугольник OBC, поскольку у него известны две стороны, которые являются сторонами уже построенных треугольников, и угол между ними, который является плоским углом трехгранного угла.



Наконец, можно построить треугольник ABC по трем сторонам, угол A которого равен по величине двугранному углу при ребре OA трехгранного угла.

5. Алгебраический метод (АМ)

Суть этого метода состоит в том, что иногда можно построить элемент, равный элементу, ключевому для построения.

В разделе 2 мы отмечали, что можно построить отрезок, отношение которого к данному отрезку a равно произвольному рациональному числу r или отношению двух данных отрезков b и c, то есть построить отрезок x “по формулам” x=ra и x=ab/c. Перечислим еще несколько простейших приемов построения отрезков по формуле. Ясно, что формула должна “давать размерность длины”, хотя, разумеется, это условие не всегда является достаточным для возможности построения.

Имея отрезки a, b, c, …, можно построить отрезок x по следующим “формулам”:

1. x=$\sqrt{a^2 \pm b^2}$. В случае знака плюс это будет гипотенуза, а в случае знака минус (конечно, должно выполняться условие a$\geq b$) - катет прямоугольного треугольника, у которого даны две другие стороны. Индуктивно построение можно распространить на случай “формулы” x=$\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \ldots}$ для любого конечного набора a, b, c, … данных отрезков, если только подкоренное выражение неотрицательно.
2. x=$\sqrt{ab}$.Найдите геометрическое построение. Алгебраическое построение, использующее предыдущий пункт и равенство 4ab=$(a + b)^2 - (a - b)^2$, индуктивно распространяется на случай x=$\sqrt{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + \ldots}$ (если только подкоренное выражение неотрицательно).
3. $x = \sqrt{a^2 \pm bc}$ (если только подкоренное выражение неотрицательно). Индуктивно данное построение распространяется на случай x=$\sqrt{\sum q_i\,(a_i \pm b_i)^2 + \sum \pm r_i\,(c_i d_i)}$ для произвольных данных отрезков a_i, b_i, c_i, d_i и 〚q_i, r_i,〛^являющихся произвольными рациональными числами или отношениями произвольных данных отрезков.

Последний пример очень важен, так как с его помощью можно строить все неотрицательные корни квадратных трехчленов $x^2+qbx+rcd$ для произвольных данных отрезков b, c, d и чисел q, r, являющихся произвольными рациональными числами или отношениями произвольных заданных отрезков. Оказывается, что множество отрезков, которые можно построить при помощи циркуля и линейки, по существу исчерпывается корнями квадратных трехчленов указанного вида, то есть построить можно те, и только те отрезки, которые получаются последовательными решением квадратных уравнений.

Перейдем к примерам.

Пример 1. Построить три попарно касающихся окружности с центрами в вершинах данного треугольника ABC. Рассмотрим случай, когда все касания внешние, в остальных случаях решения аналогичны. Пусть x, y и z - радиусы требуемых окружностей с центрами в вершинах A, B и C соответственно. Тогда тройка x, y, z является решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = c, \\ x + z = b, \\ y + z = a. \end{cases}$$

Из этой системы находим:

$$\begin{cases} x = \dfrac{c + b - a}{2}, \\ y = \dfrac{a + c - b}{2}, \\ z = \dfrac{a + b - c}{2}. \end{cases}$$

Пример 2. Укажем алгебраический метод построения касательной из данной точки A к данной окружности. Ясно, что достаточно построить отрезок, равный отрезку, соединяющему точку A и точку касания. Проведем через точку A произвольную секущую. Пусть a и b - отрезки с началом в точке A и концами в точках пересечения секущей с окружностью. Тогда по известной теореме требуемый отрезок будет корнем квадратного уравнения $x^2 = ab$.

Небольшая вариация этого приема позволяет сделать следующее построение.

Пример 3. Даны окружность ω и точка A. Провести через точку A прямую, пересекающую окружность ω в точках B и C, для которых AB=$\lambda \cdot AC$для заданного λ (рационального числа или отношения двух заданных отрезков).

Два последних примера иллюстрируют использование в построении некоторого, так сказать, “ключевого свойства”. Под “ключевым свойством” мы понимаем здесь утверждение (теорему, формулу, соотношение), позволяющее выразить элементы, достаточные для требуемого построения, через исходные элементы.

Приведем пример использования “ключевого свойства”.

Пример 4. Построить равнобедренный треугольник по R и r. Для этого построения можно воспользоваться формулой Эйлера, которая связывает радиусы описанной и вписанной окружностей произвольного треугольника и расстояние d между их центрами, а именно d=$\sqrt{R^2 - 2rR}$ (В случае равнобедренного треугольника доказать ее не сложно.) Теперь строим две окружности радиусов R и r, центры которых отстоят друг от друга на расстояние d согласно формуле Эйлера. Ясно, что ось симметрии требуемого равнобедренного треугольника будет также осью симметрии описанной и вписанной окружностей Поэтому вершина треугольника, противолежащая основанию, и центры окружностей лежат на одной прямой, которая и будет этой осью симметрии. Если 2r>R, то решений нет. Если 2r=R, то решение одно, в этом случае треугольник равносторонний. Наконец, если 0<2r<R, то решений два - в качестве вершины треугольника можно взять любую из двух точек пересечения прямой, проходящей через центры окружностей и описанной окружности и дальнейшее построение очевидно.

Пример 5. Построить радикальную ось двух неконцентрических окружностей (см. пример 4 б геометрических мест раздела “Метод ДМГ”). Мы знаем, что радикальная ось перпендикулярна прямой *l*, проходящей через центры окружностей, поэтому достаточно построить какую-нибудь точку M радикальной оси. Если окружности имеют общую точку, то ее можно взять в качестве М. Если ни одна из окружностей не находится внутри другой, то будем искать точку М на прямой l. Нетрудно понять, что в этом случае М находится вне окружностей, причем центр внутренней окружности находится между центром внешней окружности и точкой М. Пусть прямая l пересекает окружности последовательно в сторону удаления от М в точках A, B, C, и D. Тогда из равенства отрезков касательных, проведенных к окружностям из точки М, следует, что МА$\cdot (MA + AD) = (MA + AB) \cdot (MA + AC)$.

Один из геометрических методов построения радикальной оси использует понятие степени точки относительно окружности (см. пример 4 в геометрических мест раздела “Метод ДМГ”).

Рассмотрим три окружности α, β и ƛ, никакие две из которых не являются концентрическими. Нетрудно заметить, что радикальные оси каждой пары из них либо параллельны (в случае, когда центры всех окружностей лежат на одной прямой), либо пересекаются в одной точке. Действительно, если радикальная ось окружностей α и β не параллельна радикальной оси окружностей β и ƛ, то точка их пересечения имеет одинаковые степени относительно всех трех окружностей, значит, это точка лежит на радикальной оси окружностей α и ƛ.

Для построения радикальной оси неконцентрических окружностей α и β воспользуемся вспомогательной окружностью ƛ. Если окружность ƛ пересекает обе окружности α и β, то как мы видели, легко построить радикальную ось окружностей α и ƛ и радикальную ось окружностей β и ƛ. Если, кроме того, центр окружности ƛ не лежит на прямой, проходящей через центры окружностей α и β , то эти радикальные оси пересекаются в точке, лежащей на радикальной оси окружностей α и β .

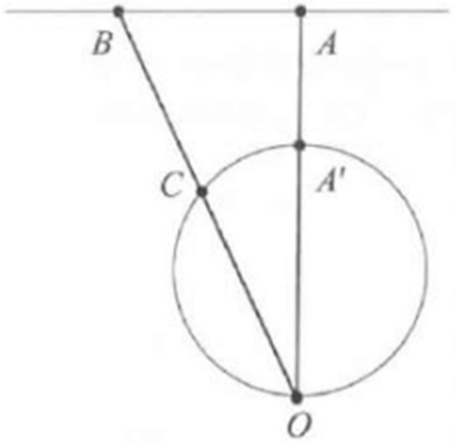
6. Использование инверсии (ИИ)

Вначале дадим определение и рассмотрим основные свойства инверсии.

Пусть на плоскости дана окружность с центром О и радиусом r. Инверсия относительно данной окружности - это преобразование плоскости, при котором каждая точка плоскости А переходит в точку А’, находящуюся на луче ОА, для которой ОА$\cdot$ OA'=r^2. Окружность, относительно которой производится инверсия, называется окружностью инверсии. Из определения видно, что, строго говоря, инверсия не является преобразованием плоскости, так точка О “никуда не переходит”. Можно было бы удалить из плоскости центр инверсии, тогда получилось бы “честное” преобразование плоскости с “выколотой” точкой О. Однако удобнее, наоборот, добавит к плоскости “бесконечно удаленную” точку О’ и считать, что при инверсии точки О и О’ переходят друг в друга. При этом приходится считать, что любая прямая содержит добавленную точку.

Основные свойства инверсии:

1. При инверсии точки окружности инверсии переходят сами в себя, а внешние точки переходят во внутренние, и наоборот.
2. (А’)’=А для любой точки плоскости А. Иными словами, если дважды произвести одну и ту же инверсию, то получится тождественное преобразование.
3. Прямая, проходящая через центр инверсии, переходит сама в себя.
4. Для любых точек А В, не лежащих на одной прямой с центром инверсии О, треугольники ОАВ и ОВ’А’ будут подобными. (Сходственными будут вершины А и В’, В и А’)
5. Прямая, не проходящая через точку О, переходит в окружность, проходящую через О. По свойству 1 это означает, что окружность, проходящая через О, переходит в прямую, не проходящую через О.



Доказательство: Пусть А - основание перпендикуляра, опущенного из О на данную прямую *l*, *и* ω- окружность с диаметром ОА’. Рассмотрим произвольную прямую, проходящую через О и пересекающую прямую *l* в точке В, а окружность ω - в точке С. Из подобия прямоугольных треугольников ОВА и ОА’С следует, что ОС·ОВ=ОА·ОА’. Это означает, что точки В и С являются взаимно инверсными. Таким образом, прямая *l* и окружность ωпри инверсии переходят друг в друга.

6. Окружность, не проходящая через центр инверсии О, переходит в окружность, не проходящую через О. При этом точка О будет внешним центром гомотетии этих двух окружностей (если, конечно, они различны).

Доказательство: Проведем через О прямую и обозначим через А и В точки ее пересечения с окружностью. (В частности, можно считать, что А и В - диаметрально противоположные точки.) Пусть, например, В лежит на отрезке ОА (остальные случаи рассматриваются аналогично). Тогда А’

$$\angle A'C'B' = \angle OC'B' - \angle OC'A' = \angle OBC - \angle OAC = \angle ACB$$

. Перечисленные свойства инверсии делают ее весьма полезным инструментом для различных построений. Возможность построения образа точки при инверсии позволяет построить образ любой системы, состоящей из конечного числа прямых, лучей, отрезков, окружностей и дуг окружностей.

Пример 1. Построить окружность (или прямую), проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей, через эту точку не проходящих.

При инверсии с центром в данной точке данные окружности перейдут в окружности, а требуемая окружность (или прямая) перейдет в общую касательную.

Инверсия является *конформным отображением*, то есть сохраняет углы между кривыми и их образами. Мы не будем здесь вдаваться в подробности относительно того, что такое угол между кривыми и когда он существует, так как будем здесь иметь дело только с прямыми и окружностями, а в этом случае все значительно упрощается.

Для двух окружностей или окружности и прямой свойство «касаться» равносильно свойству «иметь ровно одну общую точку». Поскольку преобразование инверсии (расширенной плоскости) взаимно однозначно, то две касающиеся окружности или окружность и прямая переходят в касающиеся окружности или в касающиеся окружность и прямую (или в пару параллельных прямых, если исходные линии касались в центре инверсии).

Углом между пересекающимися окружностями в их общей точкеAназывается угол между касательными к этим окружностям в точке A. *Углом* между прямой и окружностью в их общей точке Aназывается угол между этой прямой и касательной к окружности в точке A.Заметим, что если две окружности или прямая и окружность имеют две общие точки, то углы между ними в этих точках равны.

Из определения ясно, что сохранение угла при инверсии достаточно доказать только для пересекающихся прямых. Если прямые пересекаются в центре инверсии, то все ясно. В противном случае их образы пересекаются не только в образе общей точки, но и в центре инверсии, причем

под тем же самым углом. А если прямая переходит в окружность, то перпендикулярная ей прямая, проходящая через центр инверсии, проходит также через центр окружности-образа.Значит, касательная к окружности-образу в центре инверсии параллельна исходной прямой.

Пример 2. Построить окружность (или прямую), проходящую через данную точку и пересекающую две данные окружности под заданными углами.

При любой инверсии с центром в данной точке каждая из данных окружностей перейдет в окружность (или прямую), а требуемая окружность (или прямая) — в прямую, пересекающую образы окружностей под теми же углами. Для построения этой прямой можно воспользоваться тем, что все прямые, пересекающие данную окружность под данным углом, находятся на одинаковом расстоянии от центра.

Две окружности называются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом.

Пусть*A и A'* — две взаимно инверсные точки, не лежащие на окружности инверсии, ω — произвольная содержащая их окружность, и *OD*— отрезок касательной, проведенный от центра инверсии *O* до точки касания *D*с окружностью ω. Тогда произведение *OA•OA' с* одной стороны по определению инверсии равно степени инверсии r^2, а с другой стороны, по известной теореме, — равно OD^2.Значит, *OD*— это радиус окружности инверсии, а так как он является отрезком касательной к окружности ω , то эта окружность ортогональна окружности инверсии.

Проводя эти рассуждения в обратном порядке, получим, что окружность, ортогональная окружности инверсии, переходит при этой инверсии в себя.

Пример 3. Даны окружность ω и точки*A* и *B*, не лежащие вместе с ее центром на одной прямой. Построить окружность, содержащую*A* и *B* и ортогональную окружности ω.

Если точки*A* и *B* лежат на окружности ω, то центр искомой окружности будет точкой пересечения касательных к окружности ω в этих точках. Если, например, точка*A* не лежит на окружности ω, то третьей точкой искомой окружности будет точка, инверсная точке *A* относительно ω.

Из последнего примера и предшествующих рассуждений видно, что геометрическим местом центров окружностей, содержащих данную точку*A* и ортогональных данной окружности ω, является:а) пустое множество, если точкаA является центром окружности ω;

б) касательная к окружности ω в точкеA, если A лежит на окружности ω;

в) серединный перпендикуляр к отрезку с концами в точкеA и точке, инверсной к A относительно окружности ω, если точка A не лежит на окружности ω и не является ее центром.

Пример 4. Любые две окружности, не имеющие общих точек, можно некоторой инверсией перевести в концентрические.

Доказательство. Так как мы собираемся использовать инверсию с указанным свойством для различных построений, то дадим, как говорят, *конструктивное* доказательство, то есть не просто докажем существование такой инверсии, а явно укажем одну из них. Пусть α, β — две неконцентрические окружности с центрамиA и B, не имеющие общих точек.

Первым шагом будет построение окружностиγ ,ортогональной к обеим окружностям α и β, центр которойC лежит на прямой l, соединяющей центры этих окружностей. Так как отрезки касательных, проведенных из центра искомой окружности к окружностям α и β равны, то вторым геометрическим местом для центра требуемой окружности будет радикальная ось окружностей α и β. (См. пример 4 б) геометрических мест из раздела «Метод ДГМ», а так же пример 5 из раздела «Алгебраический метод».) Ясно, что центром C искомой окружности γ будет точка пересечения радикальной оси с прямой l, а ее радиусом будет отрезок касательной, проведенной из C к любой из исходных окружностей, с концами в C и точке касания.

Рассмотрим теперь какую либо инверсию с центром в одной из точек пересечения построенной окружности γ и прямой l. При этой инверсии окружность γ перейдет в прямую, перпендикулярную l, а обе окружности α и β перейдут в окружности, ортогональные этой прямой.Кроме того, центры образов окружностей α и β останутся на прямой l, а это и означает, что эти образы концентрические, что и требовалось доказать.

Удобно определять инверсию с отрицательной степенью -r^2 как композицию инверсии степени r^2 с тем же центром O и поворота вокруг O на 180°. В этом случае также $OA \cdot OA' = r^2$, но точки A и A' находятся по разные стороны от центра инверсии O. Такую инверсию называют еще *отрицательной инверсией* относительно окружности с центром O и радиусом r.

В отличие от положительной инверсии, при отрицательной инверсии точки окружности инверсии переходят в диаметрально противоположные точки, а окружностями, отличными от окружности инверсии, переходящими в себя, будут не ортогональные к ней, а пересекающие ее в диаметрально противоположных точках (докажите это).

Другие основные свойства инверсии сохраняются, например, отрицательная инверсия, являясь композицией преобразований, сохраняющих углы, сама тоже обладает этим свойством. Докажите самостоятельно, что точки A, A', B и B' лежат на одной окружности.

Пример 5. Построить окружность, проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность в двух диаметрально противоположных точках.

Так как искомая окружность при отрицательной инверсии относительно данной окружности переходит в себя, то она должна содержать инверсную к одной из данных точек (а значит и к обеим). Если данные точки лежат на одной прямой с центром данной окружности или обе лежат на данной окружности, то решений нет. В противном случае, если они совпадают или инверсны друг другу, то решений бесконечно много. В остальных случаях решение единственно.

Задачи

6.1 Построить окружность (или прямую), проходящую через две данные точки и пересекающую данную окружность под заданным углом.

6.2 Даны точки A, B, C и K, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и отрезок длины k. Провести через точку K прямую, пересекающую прямые AB и AC в точках B' и C' соответственно, для которых $\boldsymbol{KB' \cdot KC' = k^2}$.

6.3 В данный параллелограмм вписать параллелограмм с данным углом между диагоналями α, площадь которого равна k^2 — квадрату длины данного отрезка.

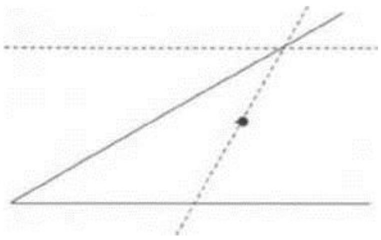
6.4 (Задача Аполлония). Построить окружность (или прямую), касающуюся трех данных окружностей.

6.5. Построить вписанный в данную окружность n-угольник, стороны которого или их продолжения проходят через n заданных точек.

Указания и решения

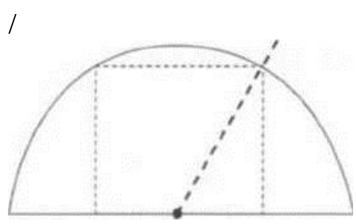
3. Метод двух геометрических мест

3.1. а) Достаточно построить точку пересечения требуемой прямой и одной из сторон угла. Одно геометрическое место для этой точки известно по условию — это сторона угла. Другим геометрическим местом является, например, прямая, симметричная другой стороне угла относительно данной точки.



б) В этом случае другим геометрическим местом будет прямая, параллельная другой стороне угла, проходящая по другую сторону от данной точки, причем расстояния от этой прямой и другой стороны угла до заданной точки находятся в данном отношении.

3.2. а) Из симметрии ясно, что сторона квадрата, лежащая на хорде, делится серединой хорды пополам, поэтому достаточно построить вершину квадрата, лежащую на дуге. Вторым геометрическим местом для этой вершины будет луч с началом в середине хорды, образующий с хордой угол, тангенс которого равен 2. Решение существует, когда угловая величина дуги сегмента не превосходит 270°, и в этом случае решение единственно.



б) Построение такое же, только луч должен образовывать с хордой угол, тангенс которого равен половине данного отношения или удвоенному данному отношению (Разберитесь, в каких случаях сколько имеется решений.).

3.3. Во всех пунктах начинаем с отрезка длины$a_{\%}$ который будет стороной требуемого треугольника. Так как медианы треугольника делят противоположные стороны пополам и сами делятся точкой их пересечения в отношении 2:1, считая от вершин, то везде достаточно построить точку пересечения медиан или середину стороны bили c. Везде нужную точку строим как третью вершину вспомогательного треугольника с известными сторонами:

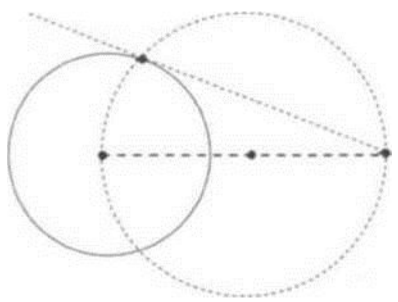
а)B, С, середина стороны $AC;$

б)В, С, точка пересечения медиан;

в)В, середина стороны BC, точка пересечения медиан;

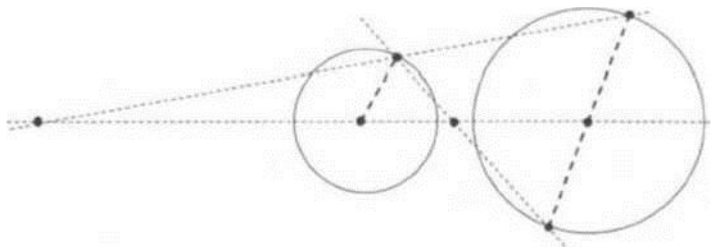
г)В, С, точка пересечения медиан

3.4. а) Ясно, что достаточно построить точку касания. Одно геометрическое место для нее уже известно — это исходная окружность. Другое геометрическое место можно получить, если вспомнить, что касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному к точке касания.



Значит, точка касания находится так же на окружности, для которой отрезок с концами в данной точке и центром данной окружности является диаметром. Легко видеть, что если исходная точка находится внутри исходной окружности, то решения нет, если она находится на границе, то решение одно, и, наконец, если вне, то решений два.

б) Здесь нам будет удобнее начать с анализа. Случаи, когда окружности совпадают, тривиален, и его анализ мы пропустим, поэтому далее считаем, что окружности различны. Если одна из окружности строго содержится внутри другой, то у них нет общих касательных, так как на любой касательной к внутренней окружности есть точки, находящиеся строго внутри внешней окружности, например, точка касания, значит, такая касательная пересекает внешнюю окружность в двух точках. Если окружности касаются, то у них будет единственная общая касательная, которая будет внешней или внутренней в зависимости от того, каким образом, внешним или внутренним образом, окружности касаются. В остальных случаях всегда существует пара внешних общих касательных. Пара внутренних общих касательных существует тогда и только тогда, когда окружности не имеют общих точек. Важное наблюдение состоит в том, что если внешние или внутренние общие касательные пересекаются, то точками их пересечения будут соответственно внешний или внутренний центр гомотетии окружностей. Внутренние общие касательные, если они существуют, всегда пересекаются, внешние общие касательные могут не пересекаться, но это будет только тогда, радиусы окружностей равны, но в этом случае задача не представляют трудностей.



Теперь видно, что задача сводится к построению центров гомотетии окружностей. Одним геометрическим местом для обоих центров гомотетии является прямая, проходящая через центры окружностей. Другим геометрическим местом будет, например, прямая, соединяющая концы параллельных радиусов, причем, если эти радиусы одинаково направлены, то прямая содержит внешний центр гомотетии, а если противоположно направлены, то внутренний. На чертеже проиллюстрирован случай, когда обе пары общих касательных существуют.

3.5. Достаточно построить основание медианы m_c. Начинаем со стороны a. Одним геометрическим местом для этой точки будет окружность с центром в конце С стороны a и радиусом m_c. Так как геометрическим местом для точкиA является окружность ω с центром в точке С и радиусом b, а основание медианы лежит на середине отрезка AB, то другим геометрическим местом для основания медианы может быть, например, окружность, гомотетичная окружности ω относительно точки B с коэффициентом гомотетии 1/2.

4. Метод вспомогательной фигуры

4.1. Построим вспомогательный треугольник с вершинами в*A, B* и точкой пересечения медиан требуемого треугольника. У этого треуголь-ника известны две стороны $2/3m_a$, $2/3m_b$ и медиана, проведенная из общей вершины $1/3m_c$. Его построение является предметом задачи 5 раздела «Метод двух геометрических мест», и анализ опирается на анализ этой задачи.

4.2. Построим треугольник, подобный требуемому (вспомогательная фигура), имея который уже легко построить требуемый треугольник. Начинаем с произвольного отрезка$A'B' = c'$ который будет соответствовать стороне *c*. Отношение двух других сторон по условию равно $\lambda = a/b$, поэтому третья вершина C' должна лежать на соответствующей окружности Аполлония.

Так как биссектриса угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении, равном отношению боковых сторон, то для любой точки этой окружности, (не лежащей на стороне$A'B'$) взятой в качестве третьей вершины треугольника, биссектриса, проведенная из нее будет пересекать противоположную сторону $A'B'$ в одной и той же точке D', лежащей на этой окружности. Это означает, что точка C' должна лежать так же на окружности Аполлония для точек A' и D' и отношения, равного a/l_c.

Анализ. Здесь мы приведем полный анализ, потому что он не будет опираться на способ построения.

Площадь треугольника равна полупроизведению сторон на синус угла между ними. С другой стороны, она складывается из площадей частей, на которые треугольник разбивается биссектрисой.

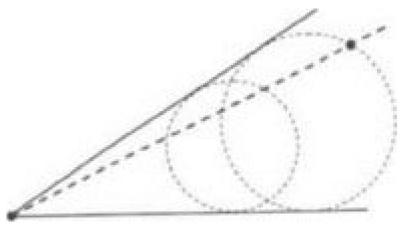
Поэтому $ab \cdot \sin\gamma = l_c(a+b) \cdot \sin\gamma/2$, то есть$l_c = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{(a+b) \cdot \sin\gamma/2}$.

Применяя формулудлясинуса двойного угла, получим$l_c = \frac{2ab \cdot \cos\gamma/2}{(a+b)}$.

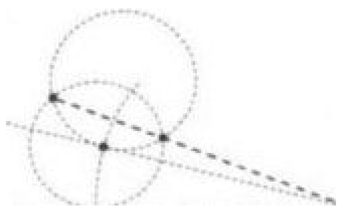
Угол γможет меняться от 0 до π, исключая эти крайние значения и приувеличении этого угла от 0 доπl_c монотонно убываетот$\frac{2ab}{(a+b)}$до 0.Поэтому решение существует тогда и только тогда, когда выполняется условие 0 $<l_c<\frac{2ab}{(a+b)}$ и в этом случае решение единственно.

4.3. В этом случае помогает следующее наблюдение: пусть ∆ — треугольник со сторонами h_a, h_b, h_c, тогда $ah_a= bh_b= ch_c$(= 2S, где S — площадь). Пусть a',b'и c' — высоты треугольника, проведенные к сторонамh_a, h_b, h_c треугольника∆соответственно. Для треугольника ∆выполняется аналогичная система равенств $h_aa' = h_bb'= h_cc'$.Деля почленно первую систему равенств на вторую, получим $a:a' = b:b'= c:c'$ то есть, треугольник со сторонами a', b'и c' подобен требуемому.

4.4. Воспользуемся тем, что все окружности, «вписанные» в данный угол гомотетичны с центром гомотетии в вершине угла. Построим в качестве вспомогательной фигуры произвольную окружность, касающуюся сторон угла. Для определения коэффициента гомотетии построенной и требуемой окружности проведем луч из вершины угла через данную точку и рассмотрим точку (любую из двух) пересечения этого луча с вспомогательной окружностью. Эта точка будет гомотеричная данной при гомотетии, переводящей вспомогательную окружность в требуемую. Таким образом мы находим два коэффициента гомотетии, переводящей вспомогательную окружность в требуемую.



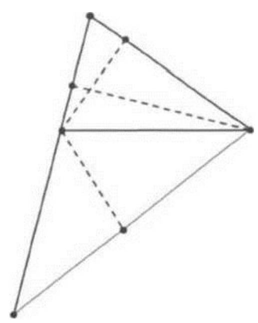
4.5. Прежде всего заметим, что если отрезок с концами в данных точках параллелен прямой, то построение осуществляется просто, так как известна третья точка окружности — а именно точка касания, которая совпадает с точкой пересечения серединного перпендикуляра к этому отрезку с данной прямой.



В противном случае прямая, проходящая через данные точки, пересекается с данной прямой. Эта точка пересечения будет для нас весьма полезной, так как она обладает замечательным свойством: все отрезки касательных из этой точки к окружностям, проходящим через данные точки из условия задачи имеют одинаковые длины (по известной теореме квадрат длины этих отрезков равен произведению длин расстояний от этой точки до данных точек). Поэтому если мы рассмотрим в качестве вспомогательной фигуры какую либо окружность, проходящую через данные точки, и проведем к ней касательную из нашей точки, то мы получим отрезок нужной длины. А так как касательная из этой точки к требуемой окружности совпадает с данной прямой, то мы имеем две возможности для точки касания требуемой окружности с данной прямой. На рисунке показана одна из них.

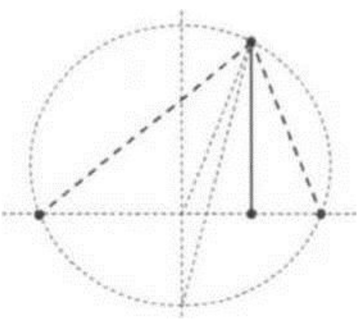
4.6. Во всех случаях обязательно будет сторона и смежная с ней высота, и можно построить вспомогательный прямоугольный треугольник, у которого данная сторона будет гипотенузой, а данная высота — одним из катетов. Имея эти вспомогательные треугольники, уже нетрудно построить требуемый. Рассмотрим для примера случай, когда даны сторона и две смежных с ней высоты (a, h_bи h_c).В этом случае нам потребуются оба вспомогательных треугольника. Начинаем со стороны a — гипотенузы вспомогательных треугольников. Первый треугольник строится однозначно с точностью до осевой симметрии. Для второго вспомогательного треугольника могут быть уже две возможности — будет он расположен по ту же сторону от гипотенузы, или по другую сторону, вторая возможность возникнет в случае, если данные высоты различны. Поэтому в этом случае искомых треугольников может быть два (с точностью до симметрии).

4.7.



Проведем анализ для этой ситуации. Сторона треугольника больше либо равна любой из смежных высот. Случай равенства реализуется только в прямоугольном треугольнике, поэтому равенство может быть только одно, и в этом случае один из вспомогательных треугольников вырожден, но он не понадобится для построения, которое в этом случае будет однозначно с точностью до симметрии. Если оба неравенства строгие, то для второго вспомогательного треугольника всегда будут две возможности, но в случае равенства высот, одна из этих возможностей не приводит к построению требуемого треугольника, и решением будет единственный равнобедренный треугольник. Если же высоты не равны, то решений будет два.

4.8. Известно, что в любом треугольнике биссектриса расположена между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, и при этом выполняются неравенства $h_a \leqslant 1_a \leqslant m_a$. При этом если имеет место



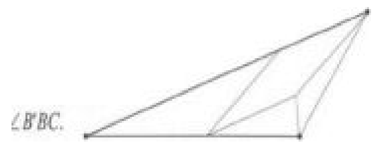
хотя бы одно равенство, то выполняется и другое равенство, то есть треугольник — равнобедренный. Рассмотрим случай неравнобедренного треугольника. В качестве вспомогательной фигуры используем описанную окружность.

Начинаем с отрезка h_a.Один из его концов будет вершинойA треугольника. Две другие вершины будут лежать на прямой, перпендикулярной к отрезку h_a и проходящей через другой его конец. Легко построить основания биссектрисы 1_a и медианы m: это вершины прямоугольных треугольников, у которых известны длины гипотенуз и одним из катетов является отрезок h_a. Прямая d, проходящая через основание медианы и параллельная высоте, будет проходить через центр описанной окружности. Для нахождения второго ГМТ для центра окружности заметим, что точка пересечения прямой dс биссектрисой лежит на описанной окружности, поэтому центр лежит на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в этой точке и вершине A.

4.8Начинаем с трех равных окружностей, попарно касающихся внешним образом. Их центры можно выбрать в вершинах равностороннего треугольника, а в качестве радиусов взять половину стороны этого треугольника. Теперь построим такую окружность, чтобы все три наших окружности касались ее внутренним образом. Получим систему, подобную требуемой.

4.9Так как $AA' = A'B'$ то точки A, A' и B' определяют некоторый ромб $AA'B'C$. Ясно, что достаточно построить подобный ему ромб. Это можно сделать так.

Вначале строим равнобедренный треугольник, подобный треугольнику $BB'C$. Это можно



сделать, так как известен угол при вершине. После этого можно построить треугольник, подобный треугольнику$B'CA$, одна его сторона пропорциональна BC, другая сторона пропорциональна AB (с тем же коэффициентом пропорциональности) и угол, между сторонами, соответствующими BC и CA равен разности углов $\angle OBA$ и$\angle B'BC$

5. Алгебраический метод

5.1Пусть ABC — требуемый треугольник, $A'B'C'$ — данные середины дуг BC, CA и AB соответственно. Тогда для угловых величин дугсправедливы следующие соотношения: $A'B' = \frac{AC + BC}{2}$, $B'C' = \frac{CA+AB}{2}$, $C'A' = \frac{AB+BC}{2}$,откуда нетрудно получить $AB = B'C' + C'A' - A'B'$ и т.д.,(сравните с Примером 1).

5.2Используя равенства $ah_a = bh_b = ch_c$, построим треугольник, подобный требуемому. Начинаем с произвольного отрезка a', который при подобии будет соответствовать стороне a. Тогда отрезки b' и c' соответствующие сторонам b и c, можно построить по формулам $b' = \frac{a'h_a}{h_b}$, $c' = \frac{a'h_a}{h_c}$.

5.3Снова воспользуемся формулой, выражающей биссектрису произвольного треугольника через смежные стороны, а именно$l_c = \frac{2ab \cdot \cos\gamma/2}{(a+b)}$. Из этой формулы можно выразить cosy/2, поскольку все остальные элементы известны. Так как косинус является безразмерной

величиной, то строить его нужно как отношение двух отрезков, из которых один выбирается произвольно.

5.1. Ясно, что достаточно построить произвольный ненулевой отрезок *a* и отрезок 2cos72°•*a*. Так как 2cos72 является корнем квадратного многочлена $x^2 + x - 1$, то отрезок 2cos72°•*a*является корнем многочлена
$x^2 + ax - a^2$.

6. Использование инверсии

6.1. При произвольной инверсии относительно данной точки требуемая окружность (или прямая) перейдет в прямую, проходящую через образ второй данной точки, и пересекающую образ данный окружности подданным углом.

6.2. По условию при инверсии степени k^2 с центром в точке*К* точки *B'* и *C'* переходят друг в друга, а это значит, что при этой инверсии одной из точек пересечения окружности — образа прямой *AB* с прямой *AC* будет точка C'.

6.3. Ясно, что оба параллелограмма, данный и требуемый, имеют общий центр *O*. Пусть *K* и *L*— точки требуемого параллелограмма, лежащие на смежных сторонах данного. Тогда для площади требуемого параллелограмма имеем k^2 = 2OK•OL•sina, , то есть$OK \bullet OL = \frac{k^2}{2\sin a}$

Пусть *M* — точка на луче *OK*, полученная из точки *L*поворотом на угол a вокруг точки *O*. Тогда точки *КиМ* взаимно инверсны другдругу при инверсии степени $\frac{k^2}{2\sin a}$ с центромO.Эту инверсию можно построить, в том смысле, что можно построить отрезок, равный радиусуокружности инверсии *r*. Для этого вначале построим отрезки *a* и *b* такие,что sin$a = \frac{a}{b}$, после чего нужный отрезок строим по формуле

$r = \frac{k}{\sqrt{2\sin a}} = \frac{k}{\sqrt{2a}}\sqrt{ab}$.Теперь ясно, что если образ одной стороны данного параллелограмма (дуга окружности) повернуть на угол *a* вокруг точкиO,то полученная дуга пересечет смежную сторону в вершине требуемого параллелограмма (возможно до 2 решений).

6.4. В вырожденных случаях, когда две или все три данные окружности совпадают, а так же когда все три данные окружности касаются в одной точке, построение легко выполнимо, и имеется бесконечно много решений. Рассмотрим теперь остальные случаи. Требуемая окружность может касаться каждой из данных как внешним, так и внутренним образом, так что для нее имеется до восьми возможностей. И действительно, задача может иметь до восьми решений (приведите примеры).

Если какие либо две данные окружности имеют общую точку, то инверсия с центром в этой точке переводит их в прямые, и задача сводится к построению окружности, касающейся двух данных прямых и данной окружности, или касающейся трех данных прямых, или прямой, параллельной данной прямой и касающейся данной окружности. Если же никакие две из данных окружностей не имеют общих точек, то после инверсии, переводящей две из них в концентрические, задача сводится к построению окружности, касающейся двух данных концентрических окружностей и данной окружности или прямой. Для окружности, касающейся двух концентрических окружностей известен радиус и геометрическое место центров (касание с меньшей окружностью может быть как внутреннее, так и внешнее). Так как радиус требуемой окружности известен, то условие касания с третьей окружностью дает второе геометрическое место для ее центра. Касание с третьей окружностью может быть как внешним, так и внутренним (до двух вариантов в каждом случае), поэтому всего имеется до восьми возможностей.

6.5. Это очень интересная задача, решить которую совсем непросто.

Обозначим окружность через ω, и пусть $A_1, A_2 \ldots A_n$— искомый вписанный в ω n-угольник, стороны которого $A_1 A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}, A_{n-1}A_n$

или их продолжения проходят через точки$M_1, M_2 \ldots M_{n-1}, M_n$ соответственно. Если какая-то из точек M_i. лежит на данной окружности, то построение осуществляется просто, поэтому будем предполагать, что ни одна из этих точек не лежит на окружности. Рассмотрим инверсию I_1, с центром в M_1, и степенью $\pm M_1A_1 \bullet M_1A_2$,причем знак плюс или минус берется в зависимости от того, лежит ли точка M_1, вне или внутри окружности. Степень инверсии не зависит от положения точек A_1, A_2и ее легко определить, проведя через точку M_1, *произвольную* секущую к окружности. Очевидно, что при этой инверсии окружность ω переходит в себя, причем вершина A_1, переходит в вершину A_2.Далее рассмотрим инверсию I_2 с центром в M_2и степенью $\pm M_2A_2 \bullet M_2A_3$Она так же переводит ω в себя, причем вершину A_2— в вершину A_3**.**Точно так же

будем рассматривать инверсии I_3, I_4, ..., и так далее. Последней будет инверсия I_n с центром в M_n и степенью $\pm M_nA_n \bullet M_nA_1$,которая переводит ω в себя, причем вершину A_n— в вершину A_1.Рассмотрим теперь преобразование I, которое является результатом последовательного применения инверсий I_1, I_2, ...,I_n в том порядке, в котором мы их записали, I =
$I_1 \bullet I_2 \bullet \ldots \bullet I_n$ .I переводит окружность ω в себя, при этом вершина A_1так же переходит в себя. Являясь композицией инверсий, преобразование I прямую или окружность переводит в прямую или окружность, причем если исходная линия проходит через точку A_1,то ее образ тоже проходит через точку A_1.
Нашим первым шагом будет нахождение точек P и Qтаких, что прямую PA_1 преобразование I переводит в прямую QA_1.Ясно, что для того, чтобы образом прямой при преобразовании I была прямая, нужно, чтобы последовательность инверсий переводила ее в прямую
или окружность, проходящую через центр $M_П$ последней инверсии $1_П$. Это значит, что в качестве P можно взять точку, которую последовательность инверсийI_1, I_2, ...,I_{n-1}переводит в точку M_n, или, что то же
самое, точку, в которую последовательность тех же инверсий, произведенных в обратном порядке, переводит точку M_n. Далее, если последовательность инверсий I_1, I_2, ...,I_nпереводит прямую PA_1 в прямую QA_1, то последовательность тех же инверсий произведенных в обратном порядке, переводит прямую QA_1в прямую PA_1,и совершенно аналогичные рассуждения показывают, что в качестве точки Qможно взять точку, в

которую последовательность инверсий I_1, I_2, ...,I_nпереводит точку M_1.

Теперь для нахождения точки A_1 воспользуемся конформностью инверсии. Напомним, что инверсия сохраняет величину углов и меняет их ориентацию, значит преобразование I так же сохраняет величины углов и сохраняет или меняет их ориентацию в зависимости от четности или нечетности n. Поэтому нужно рассмотреть два случая.

1. **n четно.** В этом случае углы под которыми прямые PA_1 и QA_1пересекают окружность ω равны и одинаково ориентированы. Отсюда следует, что прямые PA_1 и QA_1совпадают, и точка A_1 является точкой пересечения прямой PQс окружностью ω. В зависимости от взаимного расположения прямой PQи окружности ω задача может иметь два, одно или ни одного решения. В исключительном случае, когда точки P и Qсовпадают, задача оказывается неопределенной, то есть за вершину A_1 искомого многоугольника можно принять любую точку окружности ω.

2. **n нечетно.** В этом случае углы под которыми прямые PA_1 и QA_1пересекают окружность ω равны, но противоположно ориентированы то есть прямые PA_1 и QA_1симметричны относительно радиуса OA_1 окружности ω. В общем случае (для произвольных точек P и Q)нахождение точки A_1 окружности ω с таким свойством является довольно трудной задачей. В нашем же случае задача существенно упрощается, так как наши точки P и Qвсегда будут равноудалены от центра окружности ω, но доказать это непросто. Поэтому мы сведем задачу к случаю четного числа инверсий при помощи искусственного приема. Добавим еще одну инверсию Jотносительно самой окружности ω, а в качестве преобразования I возьмем последовательность I,I_2,…,I_n, J.Теперь точно так же

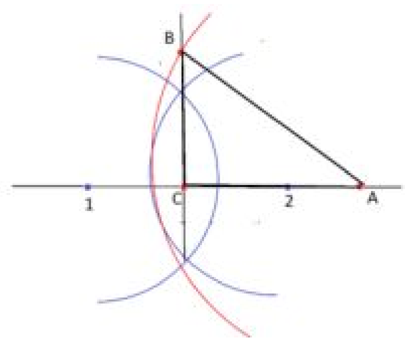
I переводит окружность ω в себя, причем точку A_1 оно переводит в себя. Теперь совершенно аналогично находятся точки P и Q, такие, что прямая PA_1 переходит в прямую QA_1.Но теперь, так как I является композицией четного числа инверсий, то прямые PA_1 и QA_1пересекают окружность под равными и одинаково ориентированными углами, и построение такое же, как и в случае четного *n*.

Задачи по теме «Геометрические построения циркулем и линейкой»

№ 1

Построить прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе.

Решение: Чертим произвольную прямую, выбираем на ней точку С. Чрез точку С проводим прямую, перпендикулярную данной (см. простейшие базовые построения). С – вершина прямого угла нашего прямоугольного треугольника. На одной прямой (например, горизонтальной) откладываем циркулем длину известного катета, ставим точку А, это – вторая вершина прямоугольного треугольника.



Из точки А раствором циркуля, радиусом, равным данной по условию длине гипотенузы, чертим полуокружность до пересечения с возведенным перпендикуляром. Это пересечение - _вершина острого угла В треугольника, его третья вершина.

Имеем треугольник, в котором катет СА начерчен данной в условии длины, гипотенуза АВ - данной в условии длины.

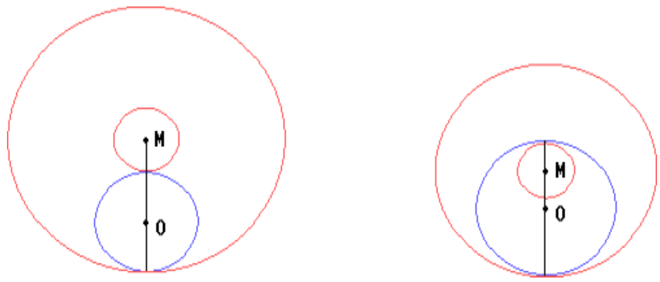
№ 2

Построить окружность с данным центром, касающуюся данной окружности.

Решение: Прямая, соединяющая центры двух касающихся окружностей, проходит через их точку касания. Поэтому сначала найдем центр данной окружности точку М (см. простейшие базовые построения), соединим найденный центр с точкой О – заданным центром второй окружности. Если данный центр лежит на данной окружности или совпадает с её центром, то задача не имеет решения. Рассмотрим другие случаи.

Обозначим через R радиус данной нам окружности. Пусть точка O лежит вне данной окружности. Тогда радиус искомой окружности равен MO–R (внешнее касание) или MO+R (внутреннее касание).

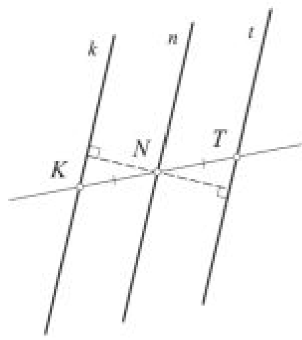
Если M лежит внутри данной окружности, то задача также имеет два решения. В этом случае радиус искомой окружности равен R+MO (внутреннее касание) или R–MO (также внутреннее касание).



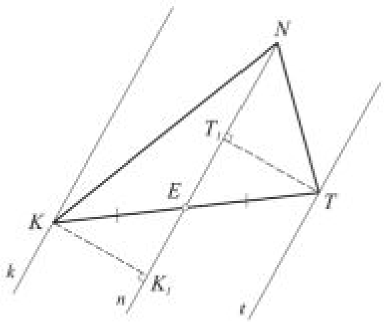
№ 3

Даны три точки. Провести три параллельные прямые, проходящие соответственно через эти три точки и находящиеся на одинаковом расстоянии друг от друга.

Решение: Если данные точки K, N, T лежат на одной прямой и при этом KN=NT, то подойдут любые три параллельные прямые k, n, t (построение описано в простейших базовых построениях). Если KN≠NT, то невозможно провести через данные точки параллельные прямые, находящиеся на одинаковом расстоянии друг от друга.



Если же данные точки K, N, T не лежат на одной прямой, то, соединив их, получим ΔKNT. Построим E – середину KT (базовое построение). Проведем прямую NE, и проведем параллельные ей прямые через точки K и T. Построенные прямые k, n, t будут искомыми, т.к. расстояния между прямыми будут

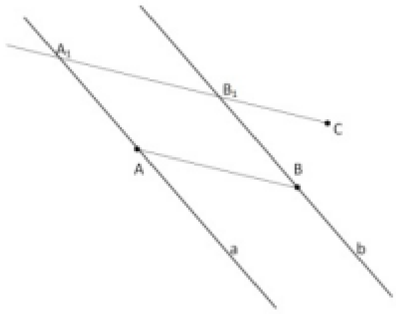


равными ($KK_1=TT_1$, т.к. $\Delta KK_1E=\Delta TT_1E$ по гипотенузе и острому углу при вершине E).

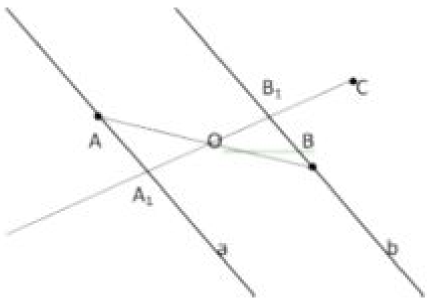
Т.к. изначально мы могли делить пополам каждую из сторон ΔKNT, то задача имеет три решения.

№ 4

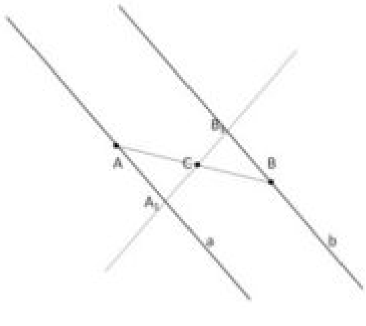
На заданных параллельных прямых a и b даны по точке A и B. Через данную точку C провести прямую, пересекающую прямые a и b в точках A_1 и B_1 таких, что $AA_1=BB_1$.



Решение: 1) Соединим точки A и B отрезком. Через точку C проведем прямую параллельно этому отрезку (базовые построения). Проведенная прямая пересечет прямые a и b в точках A_1 и B_1 соответственно. Эти точки будут искомыми, т.к. ABA_1B_1 – параллелограмм, т.к. его противолежащие стороны параллельны (по условию задачи и построению), а противолежащие стороны параллелограмма равны, т.е. $AA_1=BB_1$.



2) Также можно провести прямую через точку C и середину отрезка AB точку O, данная прямая пересечет прямые a и b в точках A_1 и B_1 соответственно. Эти точки будут искомыми, т.к. $\Delta AA_1O=\Delta BB_1O$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), а значит, $AA_1=BB_1$.

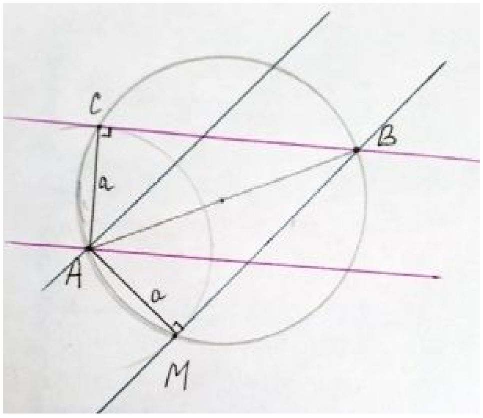


3) Отдельно рассмотрим случай, если точка C лежит на прямой AB. Тут возможны два варианта: Если точка C является серединой отрезка AB, то через нее можно провести любую прямую, отличную от AB, пересекающую прямые a и b, т.к. $\Delta AA_1C=\Delta BB_1C$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам), а значит, $AA_1=BB_1$.

Если точка C лежит на прямой AB, но не является серединой отрезка AB, задача не имеет решений, т.к. невозможны ни первый способ проведения через C прямой параллельно AB невозможен, ни второй (проведение через C и середину AB прямой, отличной от AB).

№ 5

Провести две параллельные прямые, проходящие соответственно через две данные точки и находящиеся на заданном расстоянии друг от друга.



Решение: Пусть A, B – данные точки, и a – данное расстояние. Построим окружность на отрезке AB как на диаметре. Затем построим окружность радиуса a с центром A. Точки пересечения окружностей обозначим C и M. Теперь проведем прямую BC, и затем через точку A прямую параллельно BC. Это будут искомые прямые. Они параллельны по построению, расстояние между ними равно AC=a, т.к. угол C прямой (вписанный угол, опирающийся на диаметр AB).

Если a<AB, то задача имеет два решения (окружности имеют 2 точки пересечения, и мы можем провести первую прямую BC или BM).

Если a=AB, то задача имеет 1 решение, т.к. в этом случае точка пересечения у окружностей будет одна – точка B. В этом случае через A и B строим прямые перпендикулярно AB, это буду искомые параллельные прямые.

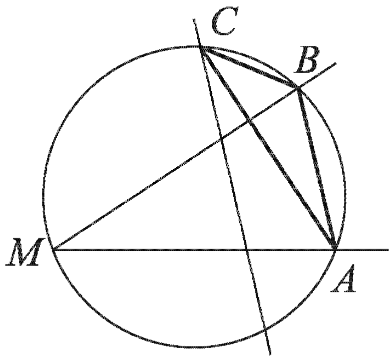
Если a>AB, то задача решений не имеет.

№ 6

Построить треугольник ABC по a, α, h_a.

Решение: Для построения треугольника нужно определить положение вершины, противоположной данной стороне. Искомая вершина принадлежит пересечению двух геометрических мест: 1) прямой, параллельной данной стороне и удаленной от неё на расстояние h_a, и 2) дуге окружности, из каждой точки которой данная сторона видна под заданным углом α.

Поэтому сначала строим заданный угол α с вершиной в точке M, на его стороне возьмем какую-нибудь точку A и отметим на другой его стороне точку B так, чтобы длина отрезка AB=a. Опишем около треугольника ABM окружность, дуга AMB будет ГМТ, из которых AB виден под углом α. Теперь проведем прямую параллельно AB на расстоянии h_a по ту же сторону от AB, что и точка M. Точка пересечения C этой прямой и дуги окружности будет третьей вершиной треугольника.

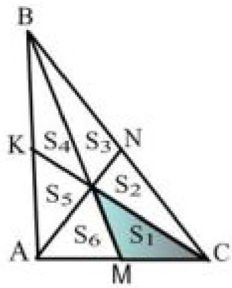


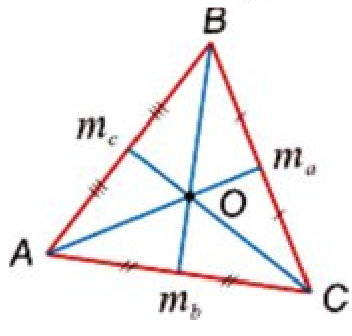
Действительно, в Δ ABC сторона AB равна данной стороне а по построению; угол ACB равен углу AMB=α, так как эти углы вписанные и опираются на одну и ту же дугу AB; высота, проведенная из вершины C, равна данной высоте h_a по построению.

№ 7

Внутри данного треугольника ABC построить точку O такую, чтобы площади треугольников AOB, BOC и COA были равны.

Решение: каждая медиана треугольника разбивает его на два равновеликих треугольника (т.к. сторона делится пополам, а высота, проведенная к этой стороне, для каждого из треугольников остается той же). Медианы треугольника пересекаются в одной точке, деля его на шесть равновеликих треугольников. Значит, для того, чтобы площади треугольников AOB, BOC и COA были равны, нужно, чтобы точка O была точкой пересечения медиан треугольника ABC.





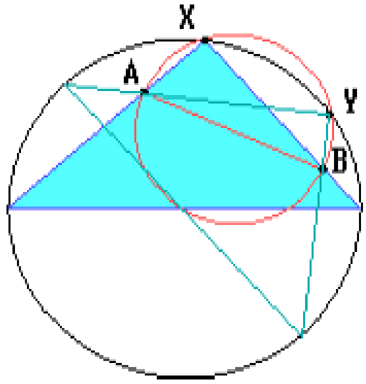
Найдем середину отрезка AB (базовые построения), соединим ее с точкой C; найдем середину отрезка BC, соединим ее с точкой A. Полученная точка O –

это точка пересечения медиан треугольника ABC, и треугольники AOB, BOC и COA будут иметь равные площади.

№ 8

Построить прямоугольный треугольник, вписанный в данную окружность, катеты которого проходят соответственно через две данные точки, находящиеся внутри этой окружности.

Решение: Пусть A и B – данные точки внутри данной окружности. Построим на отрезке AB как на диаметре окружность. Каждая точка X и У пересечения заданной и построенной окружности будет являться одной из вершин искомого треугольника, т.к. угол AXB и угол AУB будут прямыми (вписанный угол построенной окружности, опирающийся на диаметр). Продлим отрезки XA, XB до пересечения с заданной окружностью, и получим искомый треугольник, в котором угол X прямой, а стороны проходят через заданные точки A. и B. Задача может иметь одно или два решения или не иметь их в зависимости от того, сколько общих точек будут иметь заданная и построенная вспомогательная окружность.

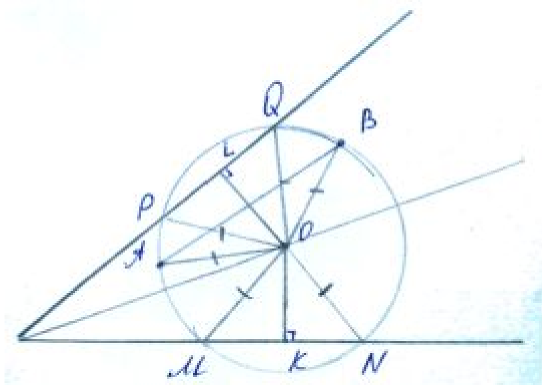


№ 9

Дан угол и две точки внутри него. Провести через эти точки окружность, отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

Решение: Предположим, что искомая окружность построена, O — её центр, Пусть A и B — данные точки, MN и PQ — равные отрезки, высекаемые окружностью на сторонах данного угла.

Опустим перпендикуляры OK и OL на MN и PQ соответственно. Из равенства равнобедренных треугольников OMN и OPQ (по трём сторонам: OM=ON=OP=OQ=r, MN=PQ), следует равенство их высот OK и OL. Значит, точка O равноудалена от сторон данного угла. ГМТ, удаленных от сторон угла – это его биссектриса.



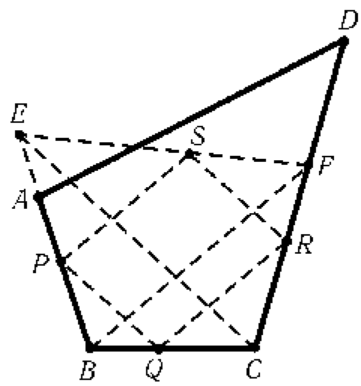
С другой стороны, точка O равноудалена от точек A и B (OA=OB=r). Поэтому она принадлежит ГМТ, равноудаленных от концов отрезка, т.е. на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

Т.е.нам нужно построить биссектрису данного угла и серединный перпендикуляр к данному отрезку AB (базовые построения), точка O их пересечения будет центром искомой окружности, отрезок OA или OB – радиусом.

№ 10

Впишите в данный четырехугольник параллелограмм с заданными направлениями сторон.

Решение: Дан четырёхугольник *ABCD*. Возьмём на прямых *AB* и *CD* точки *E* и *F* так, чтобы прямые *BF* и *CE* имели заданные направления. Рассмотрим всевозможные параллелограммы *PQRS* с заданными направлениями сторон, вершины *P* и *R* которых лежат на лучах *BA* и *CD*, а вершина *Q* – на стороне *BC* (см. рис.). Докажем, что геометрическим местом вершин *S* является отрезок *EF*.

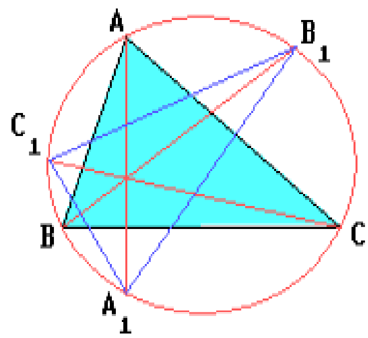


В самом деле, $SR:EC=PQ:EC=BQ:BC=FR:FC$, то есть точка S лежит на отрезке EF. Обратно, если точка S лежит на отрезке EF, то проведём $SP||BF, PQ||EC$ и $QR||BF$ (P,Q,R – точки на прямых AB, BC, CD). Тогда $SP:BF=PE:BE=QC:BC=QR:BF$, то есть $SP=QR$ и $PQRS$ – параллелограмм.
Из этого вытекает следующее построение. Строим сначала точки E и F чтобы прямые BF и CE имели заданные направления. Вершина S является точкой пересечения отрезков AD и EF. Проведём $SP||BF, PQ||EC$ и $QR||BF$ и получим искомый параллелограмм $PQRS$.

№ 11

Построить треугольник ABC, если заданы три точки A', B', C', являющиеся пересечением продолжений его высот с описанной окружностью (оба треугольника ABC и A'B'C' остроугольные).

Решение: Предположим, что треугольник ABC построен. Докажем, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на высотах треугольника ABC.



Действительно, $\angle AA_1C_1=\frac{1}{2}\cup AC_1=\angle ACC_1=\angle ABB_1=\frac{1}{2}\cup AB_1=\angle AA_1B_1$, ($\angle ACC_1=\angle ABB_1$, т.к. это углы треугольников, подобных по 2 углам: прямые углы при пересечении высотами сторон треугольника и вертикальные углы при точке пересечения высот), т.е. A_1A — биссектриса угла $B_1A_1C_1$.

Отсюда вытекает следующий способ построения. Проведём биссектрисы углов треугольника $A_1B_1C_1$ (базовое построение). Точки пересечения этих биссектрис с описанной окружностью треугольника ABC есть вершины A, B и C искомого треугольника. Действительно, если P — точка пересечения AA_1 и BC, то

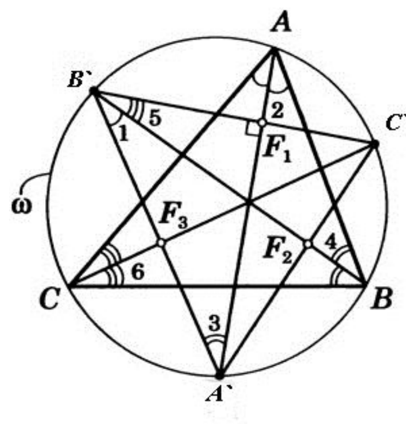
$$\angle APC = \frac{1}{2}(\cup A_1C+\cup AC_1 + \cup C_1B) = \angle A_1C_1C + \angle AA_1C_1 + \angle BCC_1 = \frac{1}{2}\angle C_1 + \frac{1}{2}\angle A_1 + \frac{1}{2}\angle B_1 = 90°.$$

т.е. AP — высота треугольника ABC. Аналогично докажем, что остальные высоты треугольника ABC лежат на прямых BB_1 и CC_1.

№ 12

Построить треугольник ABC, если заданы три точки A’, B’, C’, являющиеся пересечением продолжений его биссектрис с описанной окружностью (оба треугольника ABC и A’B’C’ остроугольные).

Решение: Соединим отрезками точки A’, B’, C’. Окружность, описанная около треугольника A’B’C’, совпадает с окружностью, описанной около ABC. Покажем, что биссектрисы углов треугольника ABC содержат высоты треугольника A’B’C’.



Пусть AA' пересекает $B'C'$ в точке F_1. Покажем, что *угол* $A'F_1B'$ равен 90°.

Действительно, $\angle 1 = \angle 2 = \frac{\angle A}{2}$ -вписанные, опираются на одну дугу, аналогично $\angle 3 = \angle 4 = \frac{\angle B}{2}$ и $\angle 5 = \angle 6 = \frac{\angle C}{2}$. Тогда в треугольнике $A'B'F_1$:

$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 5 = \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{2} = 90°$$

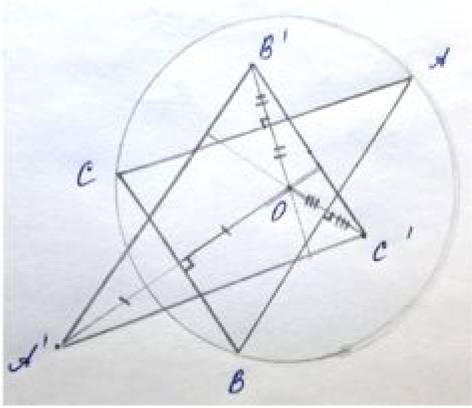
И оставшийся угол $A'F_1B'$ равен 90°. Очевидно, что точки F_2 и F_3 - также основания высот треугольника A’B’C’.

Отсюда построение: опишем около треугольника A’B’C’ окружность (базовое построение), построим его высоты и продолжим каждую из них до пересечения с этой окружностью, получим вершины треугольника ABC.

№ 13

Построить треугольник ABC, если заданы три точки A’, B’, C’, симметричные центру описанной около него окружности относительно его сторон.

Решение: Используем, что центр O окружности, описанной около треугольника является ортоцентром треугольника, образованного средними линиями исходного треугольника.



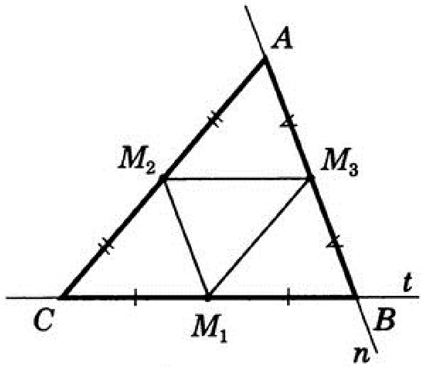
Обозначим середины сторон BC, CA, AB треугольника через A_1, B_1, C_1 соответственно. Поскольку $BC \parallel B_1C_1 \parallel B'C'$ и $OA_1 \perp BC$, то $OA' \perp B'C'$. Аналогично $OB' \perp A'C'$ и $OC' \perp A'B'$, т. е. O — точка пересечения высот треугольника $A'B'C'$.

Таким образом, проводим в $\Delta\ A'B'C'$ высоты, их точка пересечения O, проводим серединные перпендикуляры к отрезкам OA', OB', OC'. Эти прямые образуют треугольник ABC.

№ 14

Построить треугольник по серединам его сторон.

Решение: Пусть точки M_1, M_2, M_3 - середины сторон BC, AC и AB искомого треугольника ABC соответственно. Соединим их отрезками.

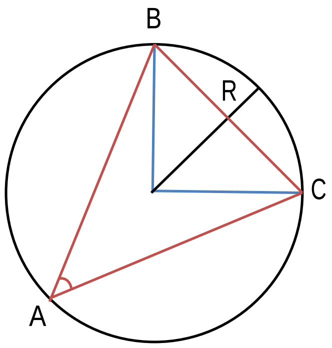


Прямая t, проведенная через точку M_1 параллельно отрезку M_2M_3, в пересечении с прямой n, проведенной через точку M_3 параллельно отрезку M_1M_2, дает вершину B искомого треугольника. Аналогично получаем вершины A и C.

№ 15

Построить треугольник ABC по углам α, β и R.

Решение: Построим окружность с произвольным центром и заданным радиусом. Строим центральный угол в два раза больший угла α (для этого проводим радиус и по обе стороны от него откладываем угол α). Получили дугу, на которую опирается вписанный угол α, концы этой дуги являются двумя вершинами треугольника B и C. Строим вписанный угол β с вершиной в точке B, и получаем таким образом третью вершину треугольника A.



№ 16

Построить треугольник ABC по углам α, β и r.

Решение: Пусть Δ ABC- искомый, тогда O-центр вписанной окружности, K – точка касания вписанной окружности и стороны AB. Тогда OK=r**.** Луч AO-биссектриса угла BAC, $\angle OAK=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{\alpha}{2}$; Луч BO-биссектриса угла ABC, $\angle OBK=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{\beta}{2}$. Следовательно, каждый из прямоугольных треугольников AKO и BKO можно построить по катету и противолежащему углу, а затем найти сторону AB искомого треугольника ABC как сумму отрезков AK и KB. Тогда искомый треугольник можно построить по стороне и двум прилежащим углам.

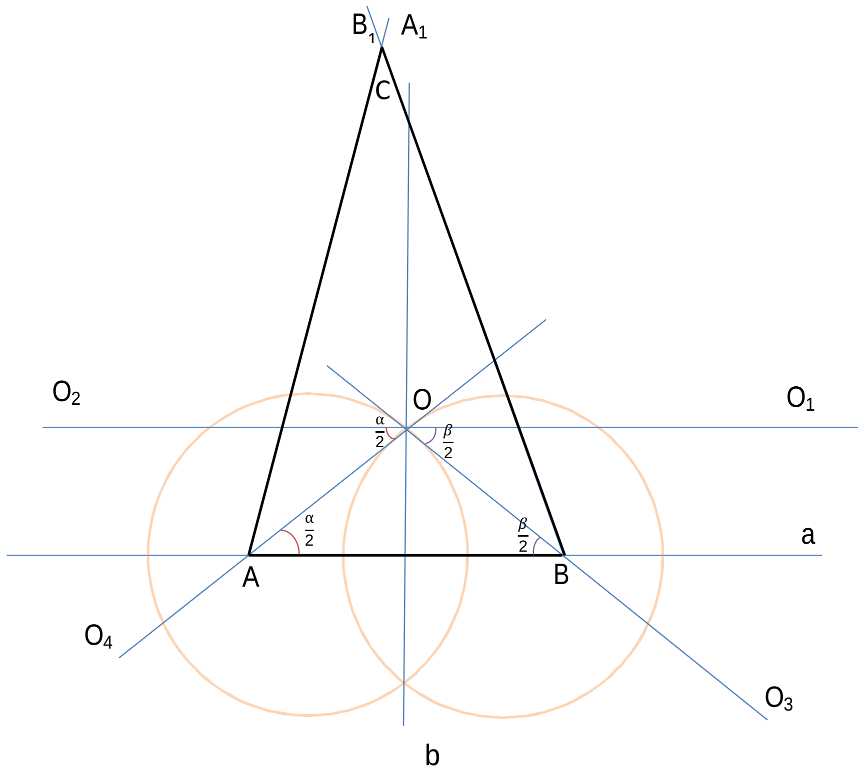
Построение:

- a перпендикулярно b, a∩b=K
- построим окружность с центром в точке K и радиусом r; данная окружность пересекает прямую b в точке O.
- OO_1 перпендикулярно b.
- Угол $O_2OO_4 = \frac{\alpha}{2}$; Угол $O_1OO_3 = \frac{\beta}{2}$.

- $OO_4 \cap a = A$; $OO_3 \cap a = B$
- $BAA_1 = \angle\alpha$; угол $ABB_1 = \angle\beta$
- $AA_1 \cap BB_1 = C$
- $\Delta\ ABC$

$\Delta\ ABC$ – искомый, т.к. у него OK перпендикулярен AB, где OK= r, $\angle OAB = \angle O_2OA = \frac{\beta}{2}$

$\angle OBA = \angle O_1OB = \frac{\alpha}{2}$; $\angle BAC = \angle\beta$; $\angle ABC = \angle\alpha$.



№ 17

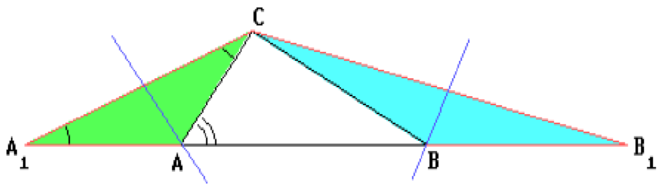
Построить треугольник по двум углам и периметру

Решение: 1 способ: Строим произвольный треугольник $A_1B_1C_1$ с углами, равными данным, и находим его периметр P_1. Искомый треугольник подобен построенному с коэффициентом $^{P}/_{P1.}$

2 способ: Предположим, что треугольник ABC построен. На продолжении отрезка AB за точку B отложим отрезок BB_1, равный BC, а на продолжении отрезка AB за точку A – отрезок AA_1, равный AC. Треугольники A_1AC и B_1BC

– равнобедренные. Поэтому $\angle A_1 = ½ \angle A$, $\angle B_1 = ½ \angle B$, $A_1B_1 = A_1A + AB + BB_1 = AC + AB + BC = P$.

Треугольник, равный треугольнику A_1B_1C, строим по стороне (равной P) и двум прилежащим к ней углам ($\angle A_1 = ½ \angle A$, $\angle B_1 = ½ \angle B$).

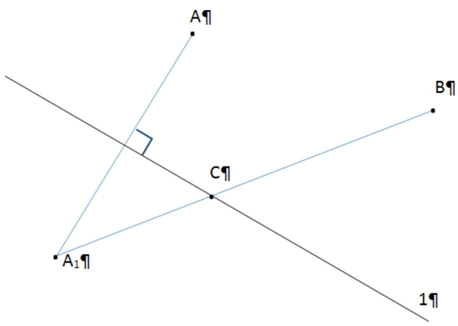


Серединные перпендикуляры к сторонам A_1C и B_1C пересекают отрезок A_1B_1 в искомых вершинах A и B.

№ 18

Даны прямая l и две различные точки A и B, находящиеся по одну сторону от l. Построить на прямой l точку C такую, что отрезки AC и BC наклонены к прямой l под одинаковыми (но противоположно ориентированными) углами.

Решение: Опустим перпендикуляр из A на l, на его продолжении отложим точку A_1, симметричную A относительно l. Проведем отрезок BA_1, он пересечет прямую l в искомой точке C. Действительно, $\angle BCM = \angle A_1CK$ как вертикальные, а $\angle ACK = \angle A_1CK$ из равенства прямоугольных треугольников $\Delta ACK = \Delta A_1CK$ (катеты AK и a1K равны по построению, катет CK общий). Следовательно, $\angle BCM = \angle ACK$.



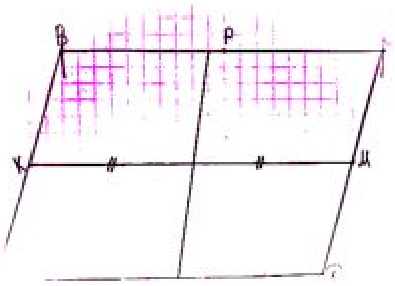
№ 19

Построить параллелограмм по серединам трех его сторон.

Решение: Пусть K, M и P – данные середины сторон параллелограмма. Если нам известно, что точки K и M – середины противолежащих сторон AB и

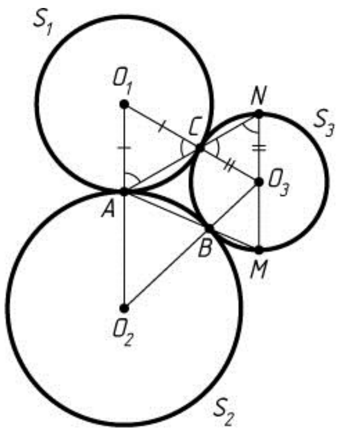
CD, то проведем построение следующим образом: Построим отрезок КМ, найдем его середину (базовые построения). Через точку Р проведем прямую параллельно отрезку КМ, раствором циркуля, равным половине КМ отметим по обе стороны от точки Р точки В и С (т.к. Р – середина ВС). Проведем прямую ВК и за точкой К отметим отрезок АК=ВК (т.к. К – середина АВ). Аналогично построим точку D на продолжении СМ. Получили искомый параллелограмм ABCD.

Если же нам не известно, какие из трех данных точек являются серединами противолежащих сторон, то мы не сможем однозначно построить параллелограмм, и задача будет иметь три решения (любой из отрезков КМ, МР и РК может соединять середины противолежащих сторон).



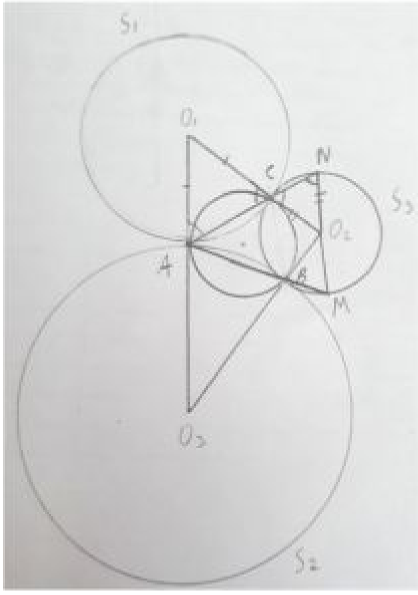
№ 20

Даны три точки. Построить три окружности, попарно касающиеся в этих точках.



Решение: Предположим, что мы построили окружности S_1, S_2 и S_3, попарно касающиеся в данных точках: S_1 и S_2 касаются в точке A; S_1 и S_3 — в точке C; S_2 и S_3 — в точке B. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры окружностей S_1, S_2 и S_3. Тогда точки A, B и C лежат на сторонах треугольника $O_1O_2O_3$, причём $O_1A = O_1C$, $O_2B = O_2A$ и $O_3C = O_3B$. Поэтому точки A, B и C являются точками касания вписанной или вневписанной окружности треугольника $O_1O_2O_3$ со сторонами.

Из этого вытекает следующее построение. Строим описанную окружность треугольника *ABC* и проводим к ней касательные в точках *A*, *B* и *C*. Точки пересечения этих касательных являются центрами искомых окружностей.

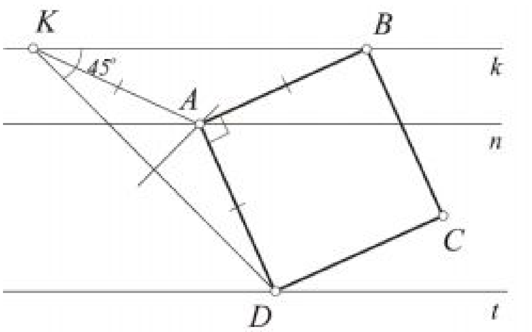


№ 21

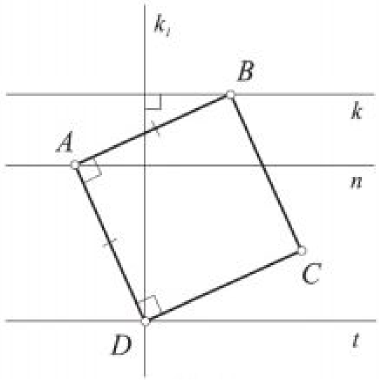
Постройте квадрат, три вершины которого лежат на трех данных параллельных прямых.

Решение:

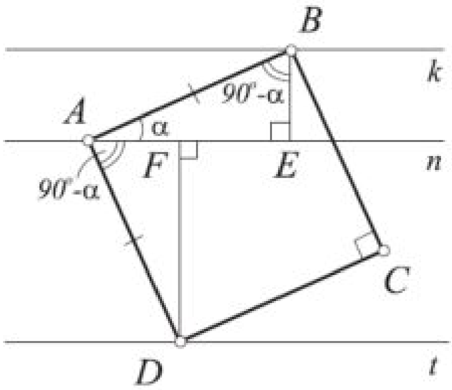
<u>1 способ.</u> Анализ показывает, что окружность с центром в A радиуса AB пересекает прямую k в точке K такой, что ∠BKD=45° (вписанный, равен половине угла BAD). Тогда из произвольной точки K∈k проводим луч под углом 45° к этой прямой. Он пересечет прямую t в вершине D. Серединный перпендикуляр к отрезку KD позволит получить вершину A∈n. Дальнейшее очевидно.



2 способ. Классический. При повороте вокруг точки $A \in n$ на 90 градусов, например, почасовой стрелке, вершина B перейдет в вершину D. Тогда прямая k_1- образ прямой k при таком повороте вокруг точки A пересечет прямую t в вершине D. Причем AD-сторона искомого квадрата.



3 способ. Анализ показывает, что $\triangle ABE = \triangle DAF$ - по гипотенузе и острому углу. Отложив AF=BE(BE-расстояние между k и n)и проведя из F перпендикуляр к прямой t, получим вершину D квадрата ABCD.



№ 22

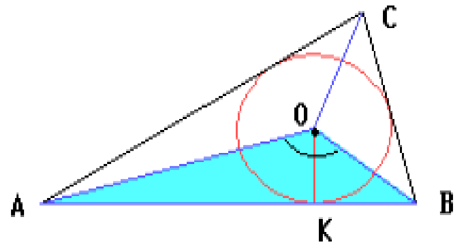
Постройте треугольник ABC по a, α и r.

Решение: Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис треугольника. Если биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O, то $\angle BOC = 90^{o} + \frac{1}{2}\angle A$.

Тогда в треугольнике BOC известны: $BC = a$ (данная сторона), высота, проведённая из вершины O (данный радиус r) и $\angle BOC = 90^{o} + \frac{1}{2}\angle A$ ($\angle A = \alpha$— данный угол).

Отсюда вытекает следующее построение.

Строим на хорде BC дугу, вмещающую угол, равный $90^0 + \frac{\alpha}{2}$. Затем проводим прямую, параллельную прямой BC, и отстоящую от неё на расстоянии, равном r. Если эта прямая пересекает построенную дугу, то каждая точка пересечения есть центр вписанной окружности искомого треугольника. Если касательные, проведённые из точек B и C к построенной окружности пересекаются в точке A, то A — третья вершина искомого треугольника ABC.



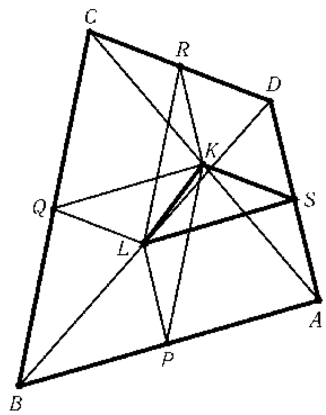
Задача имеет решение, если радиус вписанной окружности не больше, чем расстояние между прямыми BC и l , т. е. R_1-$R_1 \sin\frac{\alpha}{2} = R_1\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) =$

$\frac{a}{2\sin(90^0+\frac{\alpha}{2})}(1\text{-}\sin\frac{\alpha}{2})=\frac{(1-\sin\frac{\alpha}{2})}{2\cos\frac{\alpha}{2}}= a\ \mathrm{tg}(45^0\text{-}\ \frac{\alpha}{4}) \geq r$ или $r \leq a\ \mathrm{tg}(45^0\text{-}\ \frac{\alpha}{4})$.

№ 23

Постройте четырехугольник ABCD по 4 сторонам и углу между AB и CD.

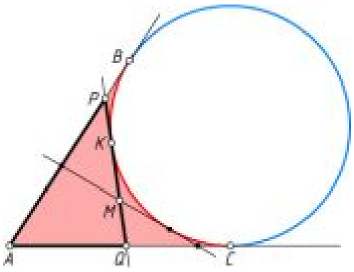
Решение: Предположим, что четырехугольник $ABCD$ построен. Обозначим середины сторон AB, BC, CD и DA через P, Q, R и S соответственно и середины диагоналей AC и BD через K и L.



Т.к. KS средняя линия треугольника ACD и LS средняя линия треугольника ABK, то в треугольнике KSL известны $KS = CD/2$, $LS = AB/2$ и угол KSL, равный углу между сторонами AB и CD. Построив треугольник KSL, на стороне KL можно построить треугольник KRL, так как известны длины всех его сторон. После этого достраиваем треугольники KSL и KRL до параллелограммов $KSLQ$ и $KRLP$. Вершины A, B, C, D являются вершинами параллелограммов $PLSA$, $QKPB$, $RLQC$, $SKRD$.

№ 24

Проведите через данную точку М прямую так, чтобы она отсекала от данного угла треугольник данного периметра.



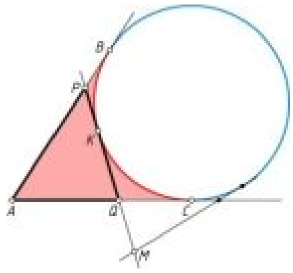
Решение: Пусть A – вершина данного угла, p – данный периметр. Отложим на сторонах угла точки B и C так, что $AB = AC = p/2$. Впишем в угол окружность, касающуюся его сторон в точках B и C. Пусть M – точка внутри данного угла. Если точка M окажется внутри криволинейного треугольника ABC, ограниченного отрезками AB, AC и меньшей дугой BC окружности, то проведём через точку касательные к окружности.

Пусть одна из проведённых касательных пересекает стороны AB и AC данного угла в точках P и Q соответственно и касается окружности в точке K. Тогда

$AP+PQ+QA=AP+(PK + KQ)+QA=(AP+PK)+(KQ+QA)=(AP+PB)+(CQ+QA)=AB+AC=p$.

Аналогично для второй касательной. Таким образом, в этом случае задача имеет два решения (если точка M лежит на меньшей дуге BC и отлична от точек B и C, то эти решения совпадают).

Если точка M лежит внутри угла, но вне указанного криволинейного треугольника, то задача не имеет решений.



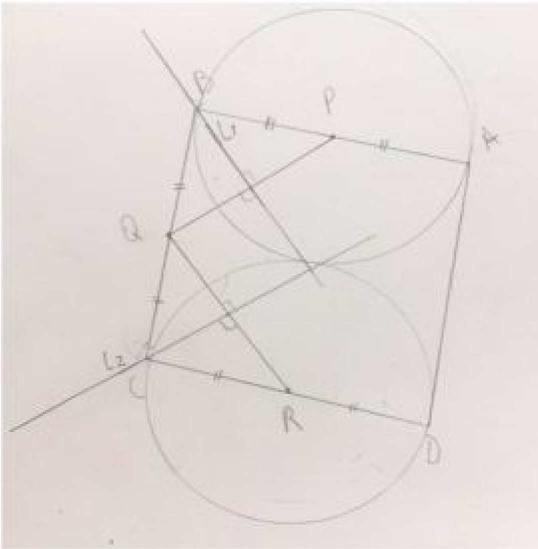
Пусть теперь точка M расположена вне угла. Если одна из касательных к построенной окружности отсекает от данного угла треугольник, для которого эта окружность вневписанная, то отсечённый треугольник – искомый (доказательство аналогично первому случаю). В этом случае задача имеет единственное решение.

В остальных случаях решений нет.

№ 25

Даны середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Постройте этот четырехугольник.

Решение: Пусть P,Q,R — середины равных сторон AB,BC,CD четырехугольника ABCD. Проводим отрезки PQ и QR. Проведем серединные перпендикуляры l_1 и l_2 к отрезкам PQ и QR (простейшие базовые построения). Затем через точку Q проводим отрезок с концами на прямых l_1 и l_2 так, чтобы Q была его серединой, получаем сторону BC. Проводим отрезок CR, который является половиной стороны CD, при помощи циркуля достраиваем сторону CD, проводя отрезок равный CR. Аналогично строим сторону AB. Соединяем точки A и D, получаем искомый четырехугольник.



9. ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ

№1.

Есть 68 шаров, попарно различных по весу. Как за 100 взвешиваний на чашечных весах без гирь найти самый легкий и самый тяжелый шар?

Решение: Взвешиваем попарно все шары, легкие откладываем в одну кучку, тяжелые - в другую, всего получается 34 взвешивания. В «легкой» кучке взвешиваем два шара (1 взвешивание), более тяжелый откладываем, с более легким сравниваем каждый оставшийся шар (еще 32 взвешивания). Каждый раз более тяжелый шар откладываем, более легкий на данный момент оставляем для сравнения, т.е. каждый следующий шар сравнивается с самым легким на данный момент. Последнее взвешивание выявит нам самый легкий шар. С «тяжелой» кучкой - то же самое, но только откладываем в сторону легкие шары, и каждый раз выявляем наиболее тяжелый шар, получится также 33 взвешивания. Итого – 34+33+33=100 взвешиваний.

№2.

Существует ли четырехугольник, у которого можно изменить положение любой вершины, оставив три другие на месте, так, что получившиеся четыре точки служат вершинами четырехугольника, равного исходному?

Решение: Да, существует. Если взять 4 вершины правильного пятиугольника, мы получим равнобокую трапецию. Перенося одну любую из 4 вершинув пятую вершину пятиугольника, мы получим снова трапецию, равную исходной.

№3.

Сколько существует пар натуральных чисел (a;b) таких, что a — четырехзначное, b — трехзначное и каждое из них делится на a–b?

Решение: Рассмотрим разность a - b.

Если она равна 1, то возможна только одна пара, где a – четырехзначное, b – трехзначное: (1000; 999), и эта пара подходит, т.к. оба числа делятся на 1.

Если разность равна 2, то существуют две пары «четырехзначное-трехзначное» (1001; 999) и (1000; 998), при этом подходит по условию делимости на разность только одна (1000; 998).

Если разность равна 3, то существуют три пары «четырехзначное-трехзначное» (1002; 999), (1001; 998) и (1000; 997), при этом подходит по условию делимости на разность только одна (1002; 999).

Т.е. мы видим закономерность, что для каждой разности a-b существует a-b пар чисел (a; b), где a четырехзначное, b – трехзначное. Каждый раз только одна из этих пар будет делиться на a-b, т.к. из n подряд идущих чисел только одно из них делится на n, остальные при делении дают остатки от 1 до n-1.

Всего разностей 999 (при разнице равной 1000 уже нет ни одного трехзначного числа, которое бы делилось на 1000), и значит, существует ровно 999 пар чисел.

Ответ: 999 пар чисел.

№4.

Известно, что x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + ax - \frac{1}{2a^2} = 0$, где a - ненулевое вещественное число. Докажите, что $x_1^4+x_2^4 \geq 2+\sqrt{2}$.

Доказательство: $x^2 + ax - \frac{1}{2a^2} = 0$

$D = a^2 + \frac{4}{2a^2} = a^2 + \frac{2}{a^2} \geq 0$ при любых ненулевых a, т.е. уравнение всегда имеет два корня. По теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -a \\ x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{1}{2a^2} \end{cases}$$

Выразим $(x_1 + x_2)^2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + 2x_1 \cdot x_2 = {x_1}^2 + {x_2}^2 - \frac{2}{2a^2} = {x_1}^2 + {x_2}^2 - \frac{1}{a^2} = a^2$, откуда

${x_1}^2 + {x_2}^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$.

Возведем полученное равенство в квадрат:

$$({x_1}^2 + {x_2}^2)^2 = {x_1}^4 + {x_2}^4 + 2{x_1}^2 \cdot {x_2}^2 = {x_1}^4 + {x_2}^4 + 2\left(\frac{1}{4a^4}\right)$$

$$= {x_1}^4 + {x_2}^4 + \frac{1}{2a^4} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2$$

Выразим искомое выражение: ${x_1}^4 + {x_2}^4 = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 - \frac{1}{2a^4} = a^4 + 2 + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{2a^4} = 2 + a^4 + \frac{1}{2a^4}$

Чтобы доказать, что ${x_1}^4 + {x_2}^4 \geq 2 + \sqrt{2}$ достаточно доказать, что $a^4 + \frac{1}{2a^4} \geq \sqrt{2}$: $\frac{2a^8+1}{2a^4} \geq \sqrt{2}$. Т.к. $2a^4$ положительное число, то $2a^8 + 1 \geq 2\sqrt{2}a^4$ или $2a^8 - 2\sqrt{2}a^4 + 1 \geq 0$ или $\left(\sqrt{2}a^4 - 1\right)^2 \geq 0$, а это верно для любого вещественного a. А значит, ${x_1}^4 + {x_2}^4 \geq 2 + \sqrt{2}$, что и требовалось доказать.

№5.

Найдите все натуральные числа n, для которых число $[n^2 \div 5]$ является простым. (Как обычно, [x] — целая часть x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x).

Решение: Разобьем все числа на группы в зависимости от остатков при делении на 5: n=5k, n=5k±1, n=5k±2, где k – натуральное и рассмотрим в отдельности каждую группу:

1) При n=5k: $[n^2 \div 5]=[25k^2 \div 5]=[5k^2]=5k^2$ - это число будет простым только при k=1, т.е. когда n=5.

2) При n=5k±1: $[n^2 \div 5]=[(5k \pm 1)^2 \div 5]=[(25k^2 \pm 10k+1) \div 5]=[5k^2 \pm 2k+0,2]=5k2 \pm 2k=k(5k \pm 2)$ - это число при k≥2 составное, простым оно будет только при k=1, т.е. когда n=4 или n=6.

3) При n=5k±2: $[n^2 \div 5]= [(5k \pm 2)^2 \div 5]=[(25k^2 \pm 20k+4) \div 5]=[5k^2 \pm 4k+0,8]=5k^2 \pm 4k=k(5k \pm 4)$ - это число при k≥2 составное, при k=1 оно равно 9 (составное) или 1 (не является ни простым, ни составным), значит, эта группа нам не даст никаких возможных решений для n.

Ответ: n = 4 или n = 5 или n = 6.

№6.

Докажите, что n! Не делится на 2n. (n! — произведение первых n натуральных чисел $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$)

Доказательство: Каждое второе делится на 2, таких чисел $\frac{n}{2}$

Каждое четвертое делится на 4, то есть добавит еще одну двойку в разложение. Их $\frac{n}{4}$

Каждое восьмое делится на 8, то есть добавит еще одну двойку в разложение. Их $\frac{n}{8}$. И так далее.

Суммируем, получаем n*(1/2+1/4+1/8+1/16...) Сумма этого ряда меньше 1. Значит, двойка входит в разложение числа n! с показателем меньше, чем n => n! не делится на 2n, ч.т.д

№ 7

Докажите, что если для какого-то вещественного числа x выполняется равенство$\{8x\}=\{15x\}$, то $\{26x\}=\{75x\}$. (Как обычно, $\{x\}$ — дробная часть x, то есть $\{x\}=x-[x]$).

Доказательство: Если дробные части двух чисел равны, то их разность — целое число.

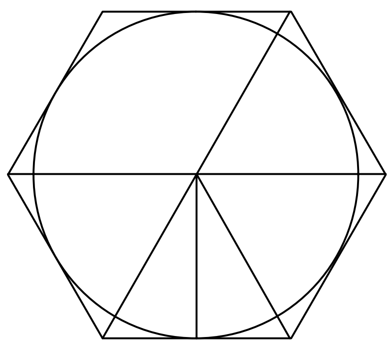
15x-8x= 7x - целое число

$75x-26x=49x=7\cdot 7x \Rightarrow$целоечисло$\Rightarrow \{75x\}=\{26x\}$, ч.т.д.

№ 8

Можно ли в прямоугольнике 8 ·6 разместить без наложения 50 кругов диаметра 1? (Круги могут касаться друг друга и сторон прямоугольника).

Решение: Вместо круга можно рассматривать правильные шестиугольники для того, чтобы заместить всю плоскость прямоугольника без пропусков. Затем следует начертить круги, вписанные в эти шестиугольники.



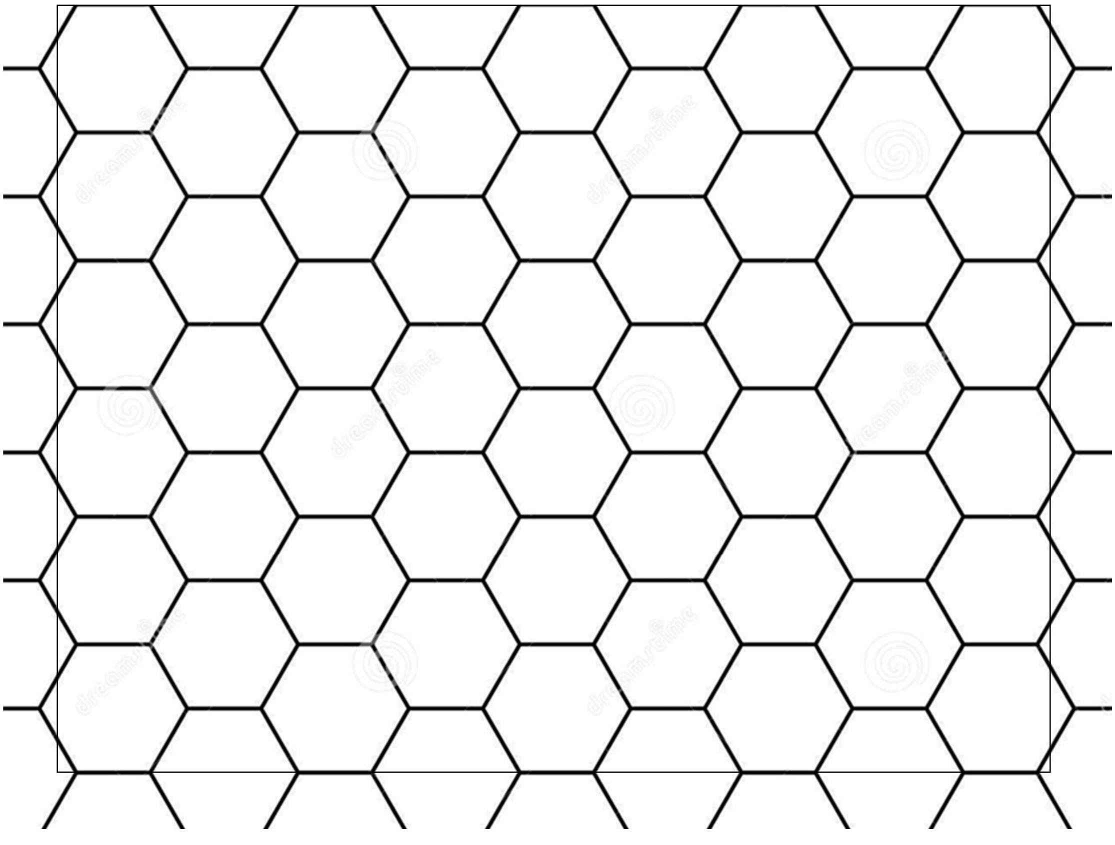
Найдем сторону шестиугольника: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$; $\frac{1}{4} + \frac{a^2}{4} = a^2$; $\frac{1}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$3a^2$=1; a^2=$\frac{1}{3}$; a=$\frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда диагональ шестиугольника $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Найдем расстояние между окружностью, вписанной в шестиугольник, и лежащим напротив неё углом этого шестиугольника $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) : 2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

По высоте в прямоугольник 6 на 8 вмещается 6 кругов в 1-ом ряду, 5 во 2-ом ряду и т.д. по очереди $\Rightarrow$ в прямоугольник точно вмещается 44 круга.

Нужно узнать, поместится ли в прямоугольник еще один ряд из 6 кругов, т.е. поместится ли в прямоугольник еще один ряд из 6 шестиугольников с учетом того, что уголки с обеих сторон могут быть обрезаны на расстояние не более $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.



$$4 \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} - 2 \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{12+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} + 1 < 4 \cdot 1{,}74 + 1 = 7{,}96 < 8$$

(округляем с увеличением)

Т.к. получили длину меньше 8 – значит, 50 кругов в прямоугольник 6 на 8 вместятся без наложений.

Ответ: можно.

№ 9

Найдите наибольшее возможное значение выражения a÷x + (a+b)÷(x+y) + (a+b+c)÷(x+y+z), где a, b, c — произвольные числа из отрезка [1;2], а x, y, z — любая их перестановка

Решение: В случае, если a=b=c (и значит, x=y=z), значение данного выражения равно 3.Поэтому есть смысл рассматривать случай, когда хотя бы одно из чисел отличается от других, или они все различны. Для определенности будем считать, что a≥b≥c.

Последнее слагаемое данной суммы при заданных условиях всегда равно 1, т.к. в числителе сумма трех чисел, и в знаменателе сумма тех же чисел с точностью до перестановки слагаемых: $(a+b+c):(x+y+z)=1$

Т.е. для нахождения наибольшего значения всей суммы нужно найти наибольшее значение суммы двух слагаемых: $a:x+$ $(a+b):(x+y)$.

Первое слагаемое может принимать значения от минимального 1 (если a=x) до максимального 2 (если a=2, а x=1).

Теперь рассмотрим второе слагаемое: для того, чтобы его значение было наибольшим, нужно, чтобы в числителе была сумма наибольшего и среднего из наших трех чисел, а в знаменателе сумма среднего и наименьшего. Понятно, что максимум числителя и минимум знаменателя будет достигнут, если наибольшее число будет равно 2, наименьшее 1 (при этих значениях максимальное значение будет и у первого слагаемого). Осталось определить, каким должно быть среднее число x, чтобы (x+2)÷(x+1) было наибольшим, с учетом, что 1≤x≤2. Т.к. функция y=(x+2)/(x+1) =1+1/(x+1) убывающая на отрезке [1; 2], то наибольшее значение функции достигается при наименьшем значении аргумента, т.е. при x =1.

Значит, искомое выражение примет наибольшее значение при a=2, b= 1 и c=1, и это значение будет равно 2+1,5+1 = 4,5.

Ответ: 4,5.